Der Weltraumlift

R.Schieder, Erftstadt

Man hört häufiger von der Idee eines „Weltraumlifts“, d.h. von einem Seil, an dem man ohne großen Energieaufwand bis in den Synchronorbit, also den geostationären Orbit unserer Fernsehsatelliten fahren kann. Diese Idee stammt schon aus dem Jahre 1895, damals angedacht von dem russischen Weltraumpionier Konstantin Ziolkowski, allerdings sprach er noch von einem Turm statt einem Seil. Eine der jüngsten „Vermarktungen“ dieser Idee stammt von Frank Schätzing in seinem Roman „Limit“ aus dem Jahre 2009, nachdem schon früher Autoren wie z.B. Arthur C. Clarke, Charles Sheffield Ende der 70-er oder Robert A. Heinlein Anfang der 80-er Jahre sich des Gedankens annahmen. Meistens wird angenommen, daß es genügt, das Seil nur bis in die Höhe des Synchronorbits zu installieren, im Falle der Erde also in ca. 36.000 km Höhe, dann wäre das System bereits perfekt. Das ist allerdings physikalischer Unsinn. Die Frage stellt sich also nach dem „physikalischen indischen Seiltrick“:

„Wie lang muß ein Seil sein, damit es am Äquator von alleine nach oben stehen bleibt?“

Auf das Seil wirken zwei Kräfte, die Erdanziehung und die Zentrifugalkraft.
Für die Erdanziehung gilt:

Jedes Längenelement *dl* des Seils erfährt die Erdanziehung $dG = g(l) \cdot dm \; = \; g(l) \cdot \rho \cdot dl$

dG ist die die Schwerkraft, die auf das Seilstück *dl* im Abstand *l* von der Erdoberfläche wirkt.
ρ ist die Massendichte pro Länge des Tragseils [kg/m].

Die Gravitationsbeschleunigung *g(l)* ist abhängig vom Abstand: $g(l) = -g_0 \cdot \frac{R_0^2}{(R_0+l)^2}$

Das Minuszeichen steht dafür, daß die Gravitationskraft nach unten gerichtet ist.
R_0 ist der Erdradius am Äquator, ebenso so wie *l* gerechnet in Metern [$R_0 = 6{,}37816 \cdot 10^6$ m]
und g_0 ist die Gravitationsbeschleunigung am Äquator [$g_0 = 9{,}81432$ m/sec^2 ohne Berücksichtigung der Zentrifugalkraft!].

Andererseits wirkt auf das Seil noch die Fliehkraft. Für das Seilstück *dl* ist sie gegeben durch:

$$dZ = \; + \omega^2 \cdot (R_0 + l) \cdot dm \; = \; + \omega^2 \cdot (R_0 + l) \cdot \rho \cdot dl$$

Diese Kraft ist nach außen gerichtet, deshalb das positive Vorzeichen. *ω* ist die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und ist gegeben durch

$$\omega = \frac{2*\pi}{T}, \quad \text{T die Rotationszeit der Erde mit}$$

$$T = 1\,\text{sid. Tag} = \; 24 \cdot \left(1 - \frac{1}{365.2536}\right) \text{ Stunden } \; = \; 23h\; 56\,\text{min}\, 4{,}099\,\text{sec} = 86.164{,}099\,\text{sec.}$$

(Wir müssen hier berücksichtigen, daß die Erde sich auf ihrer Bahn um die Sonne bereits einmal um sich selbst dreht, deshalb die Verwendung des siderischen Tages.) Die Rotationsdauer ist beim betrachteten System konstant in jeder Höhe *l*, da das komplette Seil gemeinsam mit der Erde rotiert. Insgesamt wirkt auf das Teilstück *dl* des Seils somit die Kraft:

$$dF = dG + dZ = \left[-g_0 \cdot \frac{R_0^2}{(R_0+l)^2} + \; \omega^2 \cdot (R_0 + l)\right] \cdot \rho \cdot dl$$

Die resultierende Kraft *dF*, die auf eine Masse im Synchronorbit wirkt, ist gleich Null; also gilt für den Abstand l_0, in dem sich unsere Fernsehsatlliten befinden:

$$l_0 \; = \; \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R_0^2}{\omega^2}} - R_0 \;\; \approx \;\; 35.809\; km$$

Die gesamte aufsummierte Kraft F, die auf das komplette Seil wirkt, darf nicht negativ sein, damit es nicht auf die Erde zurückfällt. (Man kann das auch so formulieren: Die aufsummierte Anziehungskraft der Erde muß vollständig durch die aufsummierte Fliehkraft kompensiert werden.) Also muß für die Gesamtlänge des Seils gelten:

$$F = \int_0^L dF \geq 0 \rightarrow \rho \cdot \left[g_0 \cdot R_0 \cdot \left\{ \frac{R_0}{R_0+L} - 1 \right\} + \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \{ (R_0+L)^2 - R_0^2 \} \right] \geq 0$$

Daraus folgt: $$L \geq L_{Min} = \sqrt{\frac{R_0^2}{4} + \frac{2 \cdot g_0 \cdot R_0}{\omega^2}} - \frac{3}{2} \cdot R_0 \approx 143.906 \text{ km } !$$

Das bedeutet, daß ein stehendes Seil tatsächlich erheblich (etwa viermal) länger sein muß als der Abstand des Synchronorbits l_0.[1] Falls das Seil länger als L_{Min} ist, dann muß die insgesamt nach außen gerichtete Kraft durch eine Gegenkraft mit einer Fixierung am Boden aufgenommen werden. Die erforderliche Seillänge läßt sich verkürzen, wenn am Ende eines kürzeren Seils ein Gegengewicht angebracht wird. Allerdings erhöht sich dadurch die Gesamtmasse der Einrichtung, denn bei kleinerem Abstand verringert sich die dort auftretende Fliehkraft, was durch mehr Masse kompensiert werden muß. Der Energieaufwand wird größer, das Unternehmen also sicherlich kostspieliger.

Aber abgesehen davon ist es völlig unklar, wie man dieses Seil eigentlich installieren kann. Versucht man es von oben herunterzulassen oder von unten nach oben zu ziehen, dann hat man das Problem, daß in jeder Höhe l der Drehimpuls ein anderer ist. Der Drehimpuls dL in der Höhe l ist gegeben durch:

$$dL = \omega \cdot (R_0 + l)^2 \cdot dm = \omega \cdot (R_0 + l)^2 \cdot \rho \cdot dl$$

Er ist also von der Höhe l abhängig, wobei in unserem Fall ω konstant ist. Man muß gleichzeitig noch Energie aufwenden, um die notwendige Drehimpulsänderung mit der Höhe auszugleichen. Im Prinzip muß die Geschwindigkeit an der Erdoberfläche kontinuierlich auf die Horizontalgeschwindigkeit in der jeweiligen Höhe gesteigert werden (von 1670 auf etwa 11060 km/h im Synchronorbit und auf enorme 39380 km/h am Ende des Seils!). Für eine erfolgreiche Installation müßte eine Rakete, die beim Start das volle Seilgewicht zu tragen hat, vom Boden aus senkrecht nach oben steigen. Dabei muß sie die erforderliche Horizontalgeschwindigkeit je nach Höhe ausgleichen, um immer genau über dem sich mit der Erde drehenden Befestigungspunkt des Seils am Boden zu bleiben.[2] Die manchmal diskutierte Idee, das Seil von der Synchronstation gleichzeitig in Richtung Erde und entgegengesetzt langsam vorzuschieben, scheitert ebenfalls an dem genannten Drehimpulsproblem. Denn es gilt wegen der Drehimpulserhaltung, daß das Seilstück bei Verschiebung in Richtung Erde bei vollkommen freier Bewegung seine Horizontalgeschwindigkeit sogar erhöhen würde, also für den niedrigeren Orbit zu schnell wäre. (Hierbei ist die Rolle der Zwangsbedingungen durch das zusammenhängende Seil noch unklar.) Auf jeden Fall wäre dies äußerst kontraproduktiv, da ja eine Verringerung der Geschwindigkeit verlangt wäre, um am selben Ort über der Erdoberfläche zu bleiben.

Das gleiche Problem stellt sich übrigens auch, wenn man mit einem Gefährt an dem Seil auf- oder abwärts fährt. Selbst bei einem wie auch immer installierten Seil bleibt die Fahrt im Aufzug nicht kostenfrei, denn man muß immer noch beträchtliche Energie zur Anpassung an die Horizontalgeschwindigkeit aufwenden, denn das Seil ist ja nicht an beiden Enden fixiert und kann deshalb seitli-

---

[1] Das sind immerhin 37,5% des mittleren Abstandes des Mondes von der Erde. Man muß demnach davon ausgehen, daß die Gravitation des Mondes die Stabilität des Seils massiv beeinflussen würde.

[2] Am Ende des Seils erreicht man tatsächlich beinahe die Fluchtgeschwindigkeit von der Erdoberfläche, die sich auf etwa 40200 km/h beläuft. Die Fluchtgeschwindigkeit definiert sich durch die kinetische Energie, die der Differenz der potentiellen Energien zwischen der Erdoberfläche und einer unendlich weit entfernten Position von der Erde entspricht.

che Beschleunigungen nicht aufnehmen. Dazu kommt natürlich noch die Energie, die zur Überwindung der Höhendifferenz erforderlich ist. In der Summe ist das genau das, was eine konventionelle Rakete beim Start von der Erdoberfläche in den Synchronorbit leisten muß.[3] Diese Energie müßte, genau wie bei einer Rakete, vom „Fahrstuhl“ mitgeführt und unterwegs verbraucht werden. Im Prinzip ist also der gesamte Energieaufwand nahezu identisch mit dem der Rakete, und ein Nutzen des Seils ist somit eigentlich kaum erkennbar! Inzwischen wird auch über Ideen nachgedacht, die benötigte Energie mittels eines Hochleistungslasers auf den Fahrstuhl zu übertragen, die dann für einen elektrischen Antrieb eingesetzt wird. Dabei ist die Frage nach der Effizienz des Systems noch unklar, allerdings erübrigt sich dabei der Aufwand, den Treibstoff für den Antrieb mit nach oben zu bewegen, wie es eine Rakete tun muß. Vielleicht wäre es einfacher, gleich zwei Seile zu installieren, die als elektrische Leiter zur Stromversorgung des Elektroantriebs genutzt werden können. Allerdings käme dabei nur supraleitendes Seilmaterial in Frage, da sonst der elektrische Widerstand angesichts der benötigten Länge vernichtend wäre.

Interessant ist noch die Frage, welchen Zugkräften *S(l)* das Seil ausgesetzt ist. Dieses Problem steht übrigens bei allen Diskussionen über dieses Thema zumeist im Vordergrund, während die Energiebilanz so gut wie immer außer Acht gelassen wird. Gehen wir zunächst einmal davon aus, daß das Seil exakt die Länge L_{Min} hat. Die gesamte Zugkraft nach unten in Höhe l ist gegeben durch

$$S_u(l) \;= \int_0^l dF(l)$$

Sie muß exakt kompensiert werden durch die gesamte Kraft des restlichen Seils, die nach außen zeigt:

$$S_a(l) \;= \int_l^{L_{Min}} dF(l)$$

Das Seil muß also an der Stelle l der Kraft S_u widerstehen. Diese ist:

$$S_u \;=\; -S_a = \int_0^l dF(l) \;=\; \rho \cdot \left[g_0 \cdot R_0 \cdot \left\{\frac{R_0}{R_0 + l} - 1\right\} + \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \{(R_0 + l)^2 - R_0^2\}\right]$$

Die gesamte Kraft ist unterhalb von der Mindestlänge L_{min} immer kleiner Null, also nach unten gerichtet. Dem entgegen wirkt die Kraft S_a. Am Boden und bei der Länge L_{Min} ist sie gleich Null, vorausgesetzt das Seil hat exakt die Länge L_{Min}. Sie erreicht ihr Maximum nach obiger Gleichung bei:

$$\frac{dS(l)}{dl} = \;\left[-g_0 \cdot \frac{R_0^2}{(R_0+l)^2} \;+\; \omega^2 \cdot (R_0 + l)\right] \cdot \rho \;=\; 0$$

Dies ist exakt die Definitionsgleichung für l_0: Das Maximum der Zugkraft findet sich also immer in der Höhe des Synchronorbits, egal, ob das Seil länger als L_{Min} ist oder nicht. Eine Länge größer als L_{Min} muß durch eine äquivalente Haltekraft am Erdboden aufgefangen werden und führt zu einer ensprechend größeren Zugspannung. Setzt man die Seillänge exakt gleich der Minimumlänge L_{min} an, dann ist das Maximum der auf das Seil wirkenden Zugkraft:

$$S_{Max} = \;\; \omega^2 \cdot \rho \cdot l_0^2 \cdot \left(\frac{l_0}{R_0} + \frac{3}{2}\right) \;\approx\;\; 48{,}38 \cdot 10^6 \cdot \rho \;\; [\text{Newton} = \text{kg}\cdot\text{m}/\text{sec}^2],$$

wobei die Massendichte ρ in kg pro Längenmeter einzusetzen ist. (Dieses Ergebnis gilt übrigens auch, wenn bei kürzerem Seil ein Gegengewicht zur exakten Kompensation verwendet wird.) Dies ist der kleinste Wert der Zugkraft, bei längerem Seil erhöht er sich entsprechend. Nehmen wir an, das Seil wiegt nicht mehr als 1 Gramm pro Meter, dann erhalten wir eine Zugkraft von 48400 Newton. Das ist die Schwerkraft, die auf eine Masse von knapp 5000 kg auf der Erdoberfläche wirken würde. Das Seil muß also einer Kraft widerstehen, die einem Gewicht von 5 Tonnen ent-

[3] Um bis in der Synchronorbit zu gelangen benötigt man immerhin schon 92% der Fluchtgeschwindigkeit von der Erde.

spricht, und das bei einem Eigengewicht von nur 1 Gramm pro Meter. Geht man z.B. von einer spezifischen Dichte des Seilmaterials von 1,8 g/cm^3 aus, dem Wert von mehrwandigen Kohlenstoffnanoröhren, dann hätte das Seil einen Durchmesser von nur knapp 0,84 mm! Die dafür verlangte Zugfestigkeit beträgt dann etwa 87 GPa (1 GigaPascal = 10^9 Newton/m^2). Das ist nicht mehr weit von den heute gefundenen Werten von 63 GPa entfernt, jedoch gibt es bislang keine praktische Methode, Nanoröhren mit der velangten enormen Länge und Dicke herzustellen. Die geforderte Zugfestigkeit ist übrigens unabhängig von der Massendichte ρ. Das Material muß die gleichen Werte aufweisen auch bei größerem Durchmesser des Seils. Lediglich das Gesamtgewicht verändert sich. Vorschläge, ein Seil mit variabler Dicke angepaßt an die am jeweiligen Ort notwendige Zugfestigkeit einzusetzen erleichtern die Lösung des Problems nur unerheblich. Inzwischen wurden bessere Daten für das Material „Graphen“ publiziert, die eine doppelt so hohe Reißfestigkeit nahelegen, allerdings ist auch hier das Problem der Herstellung noch ungelöst.

Eiin Seil mit den oben genannten Daten hat bereits eine Masse von insgesamt mindestens 144 Tonnen! Das mit der heutigen Raketentechnologie zu stemmen, könnte möglicherweise gerade noch so hinhauen. Allerdings muß man noch hinzurechnen, daß eine eventuelle Aufzugkabine am Boden auch noch etwas wiegt, was natürlich durch entsprechendes Gegengewicht am oberen Ende des Seils kompensiert werden muß, wodurch sich das Gewicht und die Anforderung an die Belastbarkeit des Seils entsprechend weiter erhöhen. Dennoch, möglichweise läßt sich bei Verwendung von Graphen das Problem der Belastbarkeit lösen, das ist zumindest der gegenwärtige Stand der Diskussion. Es bleibt aber dennoch immer noch das oben geschilderte Installations- und Energieproblem.

Man sieht, der physikalische indische Seiltrick ist wohl eher ein nettes Märchen, aber bestens geeignet für Science Fiction!

P.S.: Die Idee, den Antrieb über einen Laser mit Energie zu versorgen hat durchaus etwas Faszinierendes. Gehen wir einmal davon aus, daß wir ein Segel bestehend aus Photozellen von d=20 m Durchmesser an dem Fahrstuhl anbringen. Im Abstand des Synchronorbits würde dieses unter einem Winkeldurchmesser von

$$\alpha = \frac{d}{l_0} = \frac{0{,}02}{35809} = 5{,}6 \cdot 10^{-7}$$

erscheinen. Das entspricht im Winkelmaß 0,11“. Es wäre also unter den normalen „Seeing“-Verhältnissen im Bereich einiger Bogensekunden auf der Erdoberfläche völlig ausgeschlossen, diese Fläche wegen der atmosphärischen Einflüsse noch mit hinreichender Genauigkeit zu treffen. Man müßte also den Laser-Antrieb zweiteilen. Für den ersten Teil durch die ersten 400 km Atmosphäre kann man kann man das noch vom Boden aus durchführen, da das Segel in diesem Abstand unter einem minimalen Sehwinkel von etwa 10“ erscheint. Das kann man unter normalen Bedingungen immer erfolgreich anvisieren. Den Rest des Weges von 35360 km müßte man dann mit einem Laser in der Synchron-Basisstation versorgen. Der Durchmesser D des dafür notwendigen Teleskops zur Aussendung des Laser-Lichts errechnet sich aus

$$\beta = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

Da die Winkel α und β zueinander passen sollten, findet man, daß das Teleskop am Boden dann höchstens 20 cm groß sein muß, während im Orbit ein Teleskop mit einem Durchmesser von höchstens 1,5 m benötigt würde. Es klingt etwas widersinnig, den Laserstrahl dem Fahrstuhl entgegen zu schicken, da das empfangene Licht ja auch einen Lichtdruck in die falsche Richtung erzeugen würde. Das ist, wie wir weiter unten sehen werden, vernachlässigbar.

Gehen wir mal davon aus, wir haben es mit einem Fahrstuhl mit 1000 kg Gewicht zu tun. Das ist nicht gerade viel, da man ja immerhin Menschen über gewisse Zeit mit Luft etc. versorgen müßte. Gehen wir auch davon aus, daß wir einen Laser zu Verfügung haben mit eine Leistung von 1 MW bei einer Wellenlänge von 500 nm, das liegt im grünen Bereich des sichtbaren Lichts. Die für den Lift vom Boden bis zum Synchronorbit benötigte Energie ist

$$E \;=\; \int_0^{l_0} m \cdot g_0 \cdot \frac{R_0^2}{(R_0+l)^2} \cdot dl \;=\; m \cdot g_0 \cdot R_0 \cdot \left[1 - \frac{R_0}{R_0+l_0}\right] \;\approx\; 53{,}1\,GJ$$

Bei einer 100-prozentigen Umsetzung der Lichtenergie in Motorantrieb würde man also

$$\frac{53{,}1\,GJ}{1\,MW} \;\approx\; 53.100\,\mathrm{sec} \sim 14{,}75\,h$$

für den Aufstieg benötigen. Allerdings gibt es da sicherlich noch Verluste, z.B. gibt es keine Photozellen mit einer Quanteneffizienz von mehr als höchstens 30%. Auch dürfte es bei der Umsetzung in Motorleistung noch weitere Verluste geben. Wir schätzen also die Summe aller Verluste auf günstigenfalls 75% ein. Das bedeutet, daß sich die Aufstiegszeit auf ca. 59 Stunden erhöht. Natürlich bleibt hier völlig offen, wie das mit der thermischen Belastung der hypothetischen Solarzellen aussieht. Bei der angenommenen Effizienz hätte man mit etwa 700 kWatt Wärmeleistung zu tun, die irgendwie abgeführt werden muß – auf jeden Fall kein leichtes Unterfangen im Vakuum. Ganz abgesehen davon haben wir das Problem des Drehimpulsausgleichs hier ignoriert.

Die Frage ist also, ob und wie die Wärmeabfuhr der ungenutzten Leistung von 700 kWatt gewährleistet werden kann. Es ist klar, daß dies im Weltraum nur durch Strahlung möglich ist. Wir haben es gemäß obigen Annahmen mit einer Fläche von insgesamt 2 x 3,14 x 10^2 = 628 m^2 zu tun. Gehen wir einmal davon aus, daß diese Fläche sich wie ein schwarzer Körper verhält, daß sie also die Wärme per Strahlung mit voller Effizienz von 100% abzugeben in der Lage ist. Dann sollte die Oberfläche gemäß dem T^4-Gesetz der Wärmelehre eine Temperatur von etwas über 100 Grad Celsius aufweisen. Das wäre sicherlich zu hoch für durchschnittliche Solarzellen. Wenn wir allerdings davon ausgehen, daß 20% von den ankommenden 1 MWatt nicht absorbiert sondern reflektiert werden, dann müssen nur noch 500 kWatt thermisch abgestrahlt werden, und wir landen bei etwas über 70 Grad Oberflächentemperatur. Das ist höchstwahrscheinlich noch verkraftbar. Das gleiche Resultat finden wir, wenn wir keine Reflexion zulassen, aber die Fläche des Segels um 70% erhöhen. Man sieht, daß die Größe des Segels in mehrfacher Weise mit entscheidet, wie realistisch das beschriebene Szenario tatsächlich ist. Der scheinbare Widerspruch zwischen Reflexion von Laser-Licht und 100%-iger Emissivität ist nicht von Bedeutung, da die Wärmeabstrahlung im Infraroten bzw. Ferninfraroten stattfindet, während das Laser-Licht im sichtbaren Spektralbereich angenommen ist.

Oben hatten wir noch angesprochen, wie das mit dem Impulsübertrag des Lichts, das gegen die Bewegungsrichtung des Fahrstuhls gerichtet ist, aussieht. Es ist bekannt, daß der Impuls eines einzelnen Photons durch $p = h \cdot v/c$ gegeben ist. Bei einer Laser-Leistung von einem L = 1 MWatt reden wir von einer Anzahl von Photonen in Höhe von insgesamt $N = L/(h \cdot v)$ Photonen pro Sekunde. Insgesamt entsteht also ein Impulsfluß von $N \cdot p = L/c$ = 0,0033 kg·m/sec^2. Dies ist die Impulsänderung pro Zeiteinheit und damit nach Newton die hierbei entstehende Kraft. Wir können somit schließen, daß wir es mit einer vollkommen zu vernachlässigenden Kraft zu tun haben. Es ist also egal, ob wir das Licht dem Fahrstuhl entgegen oder hinterher schicken.