

# Bemerkungen zur Kohärenten Optik

von

Rudolf Schieder

I. Physikalisches Institut  
Universität zu Köln

Köln, 1997

(überarbeitet, 3/99)

Inhalt:

1. Optik mit Matrizen	1
2. Gauß'sche Strahlenoptik	28
3. Optische Resonatoren	49

## **Einleitung**

Die folgenden Kapitel stellen eine Sammlung von Grundlagen der kohärenten Optik dar, wie sie im Laufe von mehr als 30 Jahren bei Vorlesungen oder Laborexperimenten am Ersten Physikalischen Institut der Universität zu Köln immer wieder zur Anwendung kamen. Sie ist keineswegs als komplette Darstellung gedacht, sondern ist nur ein nach Häufigkeit der Anwendung selektierter Ausschnitt aus dem Bereich der Optik. Obwohl einige der Kapitel relativ mathematisch geraten sind, ist dieses Manuskript hauptsächlich für die praktische Anwendung gedacht, wenn man im Laufe von Experimenten vor Problemen steht, zu deren Lösung man etwas mehr als lediglich seine Intuition benötigt. Es soll zeigen, daß man mit den üblicherweise sehr theoretisch erworbenen Kenntnissen während des Physikstudiums auch im ganz konkreten Fall der praktischen Anwendung die Theorie wirklich einsetzen kann. Der Mangel an Vollständigkeit ist nicht unbeabsichtigt, denn der Text soll eine Anregung sein, Herausforderungen bei der Behandlung von Problemen bei der experimentellen Physik selbst zu lösen. Die erhoffte Wirkung ist keinesfalls, dieses Manuskript als Nachschlagewerk zu betrachten.

## **1.) Optik mit Matrizen**

### **Grundlagen**

Ein häufiges Problem im Labor ist, die Wirkungsweise von optischen Geräten korrekt einzuschätzen. Die Abbildungsverhältnisse von komplexen Optiken, die aus mehreren Linsen oder Spiegeln bestehen, sind normalerweise keineswegs unmittelbar einsichtig. Die Verhältnisse werden noch unübersichtlicher, wenn Abbildungsfehler oder Beugungseffekte auch noch berücksichtigt werden müssen. Für die Verhältnisse der einfachen geometrischen Optik genügt natürlich die Linsengleichung, die, mehrfach angewendet bei mehrlinsigen Systemen, immer zum gewünschten Resultat führen sollte, sofern Abbildungsfehler vernachlässigt werden können.

Allerdings ist diese Vorgehensweise sehr unpraktisch, deshalb ist eine Herleitung von einfacheren "mathematischen Tricks" sicherlich nützlich.

Eine der elegantesten Methoden, die Wirkung optischer Abbildungssysteme zu berechnen ist in sogenannter "paraxialer Näherung" die Methode der Abbildungsmatrizen. Paraxiale Strahlen sind Strahlen, die nur geringfügig von der Achse des Systems abweichen. Sie beschreiben also den Grenzfall achsennaher Strahlengänge, Abbildungsfehler der Optik werden so ebensowenig erfaßt wie Beugungseffekte. Es handelt sich also um reine und sehr simple geometrische Optik. Wir wollen so z.B. versuchen, die wichtigsten Eigenschaften von Laserresonatoren mit Hilfe von Abbildungsmatrizen herzuleiten. Es ist natürlich nicht möglich, auch solche Ergebnisse herzuleiten, die sich aus den Beugungseigenschaften von Licht ergeben, aber es ist doch erstaunlich, wieviel man auch so herausfinden kann.

Zunächst einmal wollen wir die Methodik der Abbildungsmatrizen herleiten. Als einfachsten Fall betrachten wir den geradlinigen Verlauf eines Lichtstrahls von einem Punkt A zum Punkt B (siehe Abb.1).

Der Strahl habe in A (Position  $z_A$ ) den Abstand  $x_A$  von der Achse und die Steigung  $m_A$  relativ zur Achse. Entsprechendes gilt für den Punkt B. Die Werte von  $x_B$ ,  $m_B$  sind auf einfache Weise mit  $x_A$ ,  $m_A$  verknüpft:

$$x_B = x_A + m_A \cdot (z_B - z_A) = x_A + m_A \cdot d$$

$$m_B = m_A$$

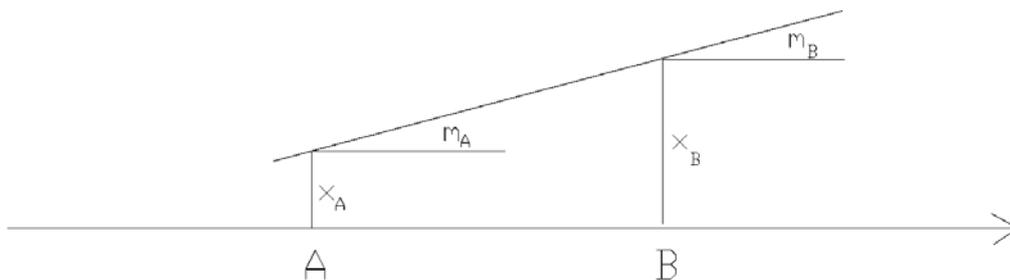


Abb.1: Strahlengang bei linearer Ausbreitung

Die Wertepaare  $(x_A, m_A)$  und  $(x_B, m_B)$  können wir formal als Komponenten von zweidimensionalen Vektoren  $\underline{x}_A$  und  $\underline{x}_B$  verstehen, obwohl noch nicht einmal die Dimension der Vektorkomponenten gleich ist (Länge und Steigung). In anderer Schreibweise können wir das Wertepaar  $(x_B, m_B)$  mit  $(x_A, m_A)$  über eine  $2 \times 2$  - Matrix verknüpfen:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ m_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A + m_A \cdot d \\ m_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ m_A \end{bmatrix} = \mathbf{T}_d \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ m_A \end{bmatrix}$$

Die Verknüpfung können wir als lineare Abbildung des zweidimensionalen Vektors  $\underline{x}_A$  auf den Vektor  $\underline{x}_B$  mittels der translatorischen Transformation  $\mathbf{T}_d$  betrachtet werden.

$$\underline{x}_B = \mathbf{T}_d \cdot \underline{x}_A, \quad \mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [1]$$

Wir sprechen also von einer simplen linearen Abbildung. Nebenbei bemerkt, die Determinante der Abbildungsmatrix  $\mathbf{T}_d$  hat den Wert 1.

Im nächsten Schritt betrachten wir nun eine Abbildung durch eine Linse (siehe Abb.2). Hierzu gehen wir zunächst nur von einer Position C unmittelbar vor der Linse aus und suchen die Transformation, die uns unmittelbar hinter die Linse bringt (Position D). Der Weg, den wir dabei in z-Richtung zurücklegen, ist dann gleich 0 (Näherung dünner Linsen).

Betrachten wir auch hier nun die Veränderung des Wertepaares  $x_C, m_C$  beim Durchgang durch die Linse. Der Abstand von der Achse kann sich natürlich bei infinitesimalem Fortschreiten auf der z-Achse nicht verändern, wir haben also:

$$x_D = x_C$$

Außerdem gilt:

$$m_C = x_C/g \quad \text{und} \quad m_D = -x_D/b,$$

wobei  $g$  und  $b$  als Gegenstands- und als Bildweite anzusehen sind. Wegen des Linsengesetzes haben wir dafür:

$$1/b = 1/f - 1/g \quad \text{und deshalb:}$$

$$\begin{aligned} m_D &= -x_D \cdot (1/f - 1/g) = x_D/g - x_D/f \\ &= x_C/g - x_C/f \\ &= m_C - x_C/f \end{aligned}$$

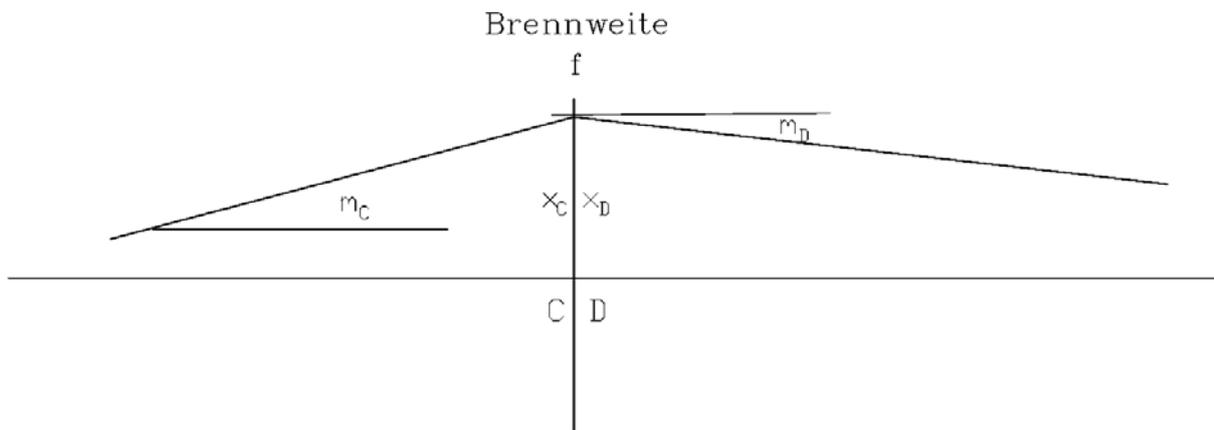


Abb.2: Durchgang eines Strahls durch eine dünne Linse

Diesen Vorgang können wir wiederum als lineare Abbildung durch eine 2x2-Matrix verstehen

$$\begin{bmatrix} x_D \\ m_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_C \\ m_C - x_C/f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ m_C \end{bmatrix} = \mathbf{T}_l \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ m_C \end{bmatrix}$$

Also haben wir:

$$\underline{\mathbf{x}}_D = \mathbf{T}_l \cdot \underline{\mathbf{x}}_C, \quad \mathbf{T}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \quad [2]$$

Ähnliches lässt sich z.B. auch für Spiegelungen an der optischen Achse angeben:

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [3]$$

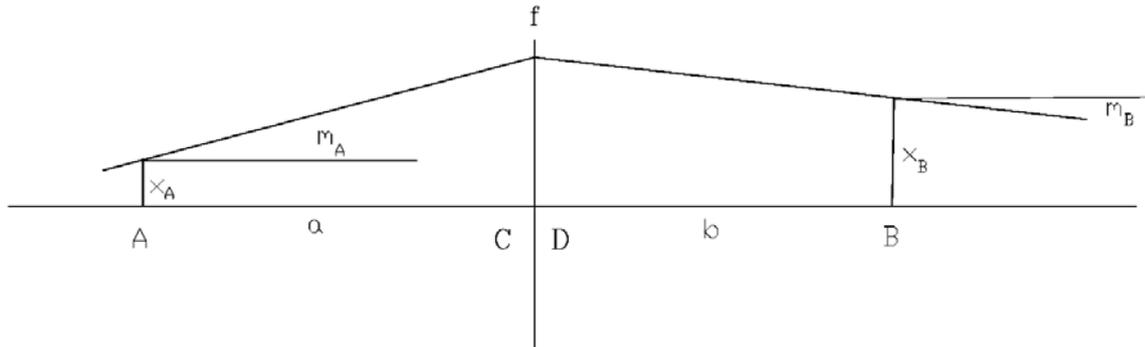
Eine Spiegelung an einer Ebene senkrecht zur optischen Achse wird durch die Einheitsmatrix beschrieben, da sich die Matrix immer auf die Ausbreitungsrichtung bezieht, die sich bei dieser Spiegelung jedoch umkehrt. Also bleiben dabei Ort  $x$  und Steigung  $m$  unverändert. Brechung durch Prismen oder andere optische Bauelemente lassen sich ebenso beschreiben. Damit haben wir praktisch alle Fälle der normalen Optik (ohne Abbildungsfehler) erfasst, denn jeder Weg in einer beliebigen, auch komplexeren Optik lässt sich aus den bisher gezeigten Transformationen zusammensetzen.

Zum Beispiel, für den kompletten Weg von einem beliebigen Punkt A bis zur Linse (Weg a) und von dort bis zum Punkt B (Weg b) (siehe Abb.3) brauchen wir nur den

gesamten Weg in drei Teilwege zu zerlegen: von A nach C mit linearer Ausbreitung, von C nach D beim Durchgang durch die Linse und von D nach B wieder mit linearer Ausbreitung. Dies läßt sich einfach durch Multiplikation der entsprechenden Matrizen nachvollziehen. Die Matrix für den gesamten Weg  $T$  ist:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_b \cdot \mathbf{T}_l \cdot \mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b/f & a+b-a \cdot b/f \\ -1/f & 1-a/f \end{bmatrix}$$

Man beachte, daß die Determinante dieser Matrix immer noch den Wert 1 hat.



**Abb.3:** Abbildung durch eine Linse

Bevor wir uns den Anwendungen der Matrizen widmen, wollen wir uns noch kurz mit der Interpretation einer verallgemeinerten Abbildungsmatrix beschäftigen. Wir wollen also die Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad [4]$$

näher charakterisieren. Diese Matrix kann eine beliebig komplexe Optik beschreiben, wobei jedoch grundsätzlich gelten muß, daß die Determinante der Matrix den Wert 1 haben muß:

$$\text{Det}\{\mathbf{T}\} = A \cdot D - B \cdot C = 1 \quad [5]$$

Zur weiteren Analyse suchen wir die Lage der Fokuspunkte am Eingang und am Ausgang unserer Optik. Dazu brauchen wir zunächst den Ort  $z = b_f$ , für den gilt, daß sich auf der Eingangsseite des abbildenden Instruments einfallende, parallele Strahlen alle in einem Punkt auf der Ausgangsseite kreuzen. Dies ist dann der Fokuspunkt am Ausgang der Optik. Zunächst transformieren wir linear um die Strecke  $b_f$  weiter, nachdem wir die Optik verlassen haben. Dann haben wir:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T}_b \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & b_f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+b_f \cdot C & B+b_f \cdot D \\ C & D \end{bmatrix}$$

Wenn der Endpunkt  $b_f$  mit dem Brennpunkt der einlaufenden parallelen Strahlen zusammenfallen soll, dann muß für den neuen Vektor  $\underline{x}'$ ,

$$\underline{x}' = \mathbf{T}' \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} A+b_f \cdot C & B+b_f \cdot D \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A+b_f \cdot C] \cdot x + [B+b_f \cdot D] \cdot m \\ C \cdot x + D \cdot m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ m' \end{bmatrix}$$

gelten, daß der Ort  $x'$  unabhängig vom Ort  $x$  der einfallenden Strahlen ist. Wenn also für konstantes  $m$  und beliebiges  $x$  ein konstanter Wert von  $x'$  (aber nicht konstanter Wert von  $m'$ ) erscheinen soll, dann muß gelten:

$$A+b_f \cdot C = 0$$

Also liegt der Ausgangsfokus der Optik, die mit der ABCD-Matrix beschrieben wird, an der Stelle

$$b_f = -A/C.$$

Genauso kann man verfahren wenn man die Lage des Eingangsfokus der Optik finden will. Dieser ergibt sich zu:

$$a_f = -D/C.$$

Wir benötigen nun noch eine Aussage über die Brennweite der Optik. Diese läßt sich folgendermaßen finden: Nehmen wir einen Achsen-parallelen Strahl am Eingang im Abstand  $x$  von der Achse. Wir wissen, daß dieser Strahl im Abstand  $b = b_f$  die optische Achse schneidet. Die Steigung dort ist

$$m' = C \cdot x \text{ (da } m = 0 \text{ sein soll).}$$

Die Definition der Brennweite der Optik ist, daß die Steigung des Strahls im Fokuspunkt auf der Bildseite gleich dem Abstand des Strahls von der Achse am Eingang der Optik geteilt durch die (negative) Brennweite ist. Wir haben also:

$$f = -x/m' = -1/C$$

Genauso können wir bei einer Umkehrung des Strahlengangs verfahren: Zu finden ist, in welchem Abstand von der optischen Achse ein Strahl, der im Abstand "0" von der optischen Achse und unter der Steigung  $m$  aus dem Eingangsfokus hervorgeht, aus der Optik herauskommt. Wir finden wiederum das gleiche Resultat wie eben.

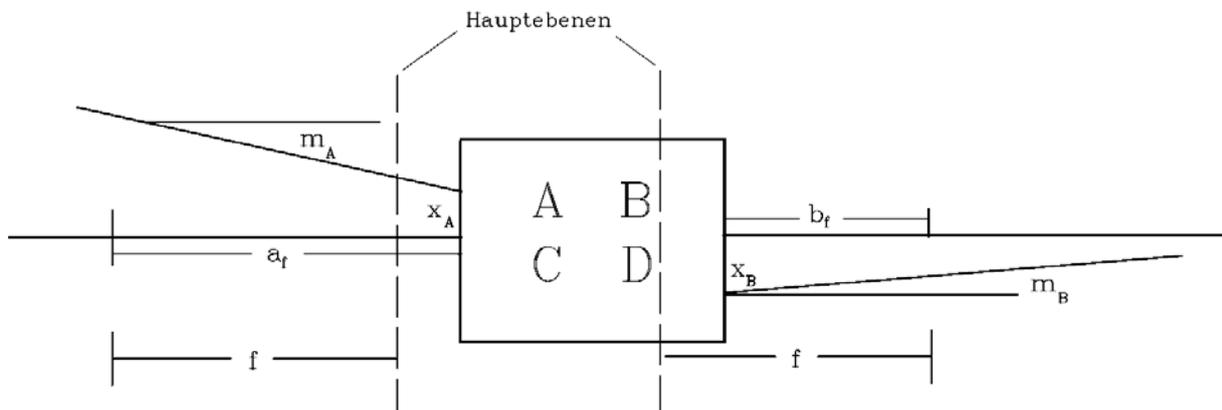


Abb.4: Abbildung durch eine ABCD-Matrix.

Wir können nun die Matrix zum besseren Verständnis umschreiben:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_f/f & f \cdot [1 - a_f \cdot b_f/f^2] \\ -1/f & a_f/f \end{bmatrix} \quad [6]$$

Der Ausdruck für B ergibt sich aus der Unitarität der Matrix, also dem Wert "1" der Determinante. Zu beachten ist, daß die Werte von  $a_f$  und  $b_f$  den Abstand der Fokuspunkte vom Ein- bzw. Ausgang des Systems angeben, für das die Matrix „ABCD“ berechnet wurde. Das hat nichts mit Abständen von irgendwelchen Linsen etc. in der Optik zu tun, es sei denn, der Ort dieser Linse ist gleichzeitig identisch mit dem Eingang bzw. Ausgang der Gesamtoptik.

Wir können also aus den vier Größen A,B,C,D eine ganze Menge über die mit der Matrix beschriebenen Optik aussagen (siehe Abb.4). Besonders wichtig ist noch, daß mit der Kenntnis der Fokuspunkte der Optik auch die Lage der sogenannten Hauptebenen der Optik angegeben werden kann. Dazu müssen wir lediglich vom dem Wert  $b_f$  die Fokallänge  $f$  subtrahieren, und kennen damit die Lage der bildseitigen Hauptebene. Ähnlich ergibt sich ebenfalls die Lage der gegenstandsseitigen Hauptebene. Natürlich nützt diese Information nur dann etwas, wenn zusätzlich die Länge zwischen Eingangs- und Ausgangs-Apertur unserer Optik bekannt ist, da sie ja nicht direkt in den Parametern A,B,C,D enthalten sind.

Wenn wir wissen wollen, wie sich die Matrix beim Variieren der "Gegenstandsweite"  $a$  bzw. der "Bildweite"  $b$  verhält, dann müssen wir lediglich die Translationen um die zusätzliche Verschiebung um  $a$  bzw.  $b$  berücksichtigen:

$$\mathbf{T}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta b/f & f \cdot [1 - \delta a \cdot \delta b / f^2] \\ -1/f & -\delta a/f \end{bmatrix} \quad [7]$$

$\delta a = a - a_f$  ist dabei der Abstand der "Gegenstandsweite"  $a$  vom Eingangsfokuspunkt und  $\delta b = b - b_f$  der Abstand der "Bildweite"  $b$  vom Ausgangsfokuspunkt der Optik. Wählt man  $a$  und  $b$  im Abstand der Brennpunkte, dann enthält die Matrix nur noch Nicht-Diagonalelemente, da  $\delta a$  und  $\delta b$  dann zu 0 werden.

Der Ausdruck für  $B$  in Gl.[7] kann folgendermaßen verstanden werden: Betrachten wir einmal die Abbildung vom Punkt  $A$  in den Punkt  $B$  in Abb.3. Wir haben dafür:

$$x' = A \cdot x + B \cdot m = -\delta b/f \cdot x + f \cdot (1 - \delta a \cdot \delta b / f^2) \cdot m$$

Wenn sich alle vom Punkt  $A$  ausgehenden Strahlen im Punkt  $B$  schneiden, dann haben wir eine exakte Abbildung des Punktes  $A$  in den Punkt  $B$ . Dazu muß jedoch der Wert von  $x'$  unabhängig von der Steigung  $m$  der von  $A$  ausgehenden Strahlen sein. Es muß also gelten:

$$B = f \cdot (1 - \delta a \cdot \delta b / f^2) = 0$$

oder

$$\delta a \cdot \delta b = f^2 \quad [8]$$

Dies ist das verallgemeinerte Abbildungsgesetz für das durch die Matrix "ABCD" beschriebene optische System (Newtonsches Abbildungsgesetz). Diese hier gefundenen Zusammenhänge gelten für jede beliebige (abbildungsfehlerfreie) Optik, egal wie viele optische Komponenten (z.B. Linsen) sie enthält.

Die Interpretation dessen, was die Fokallänge  $f$  bedeutet, wird durch die Möglichkeit von Bildumkehr erschwert. Bei einer abbildenden Optik sollte  $f > 0$  sein und somit  $C < 0$ . Findet allerdings keine Bildumkehr statt, wie das bei einem System aus zwei Linsen, deren Abstand größer als die Summe der Brennweiten ist, der Fall ist, dann muß die fehlende Umkehr als negative Einheits-Matrix abgespalten werden, wodurch  $C$  sein Vorzeichen wieder ändert. Es ist also immer eine Einzelfallprüfung zu machen, um die Interpretation der Matrix korrekt vornehmen zu können.

Bleibt noch nachzutragen, wie die Inversion der Abbildung aussieht. Dafür gilt:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^{-1} & B^{-1} \\ C^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [9]$$

Daher gilt:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \quad [10]$$

Andererseits, einer bloßen Umkehrung des Strahlengangs entspricht das alleinige Vertauschen der Diagonalelemente der Matrix, während die Nichtdiagonalelemente erhalten bleiben. Dies ist aus der Symmetrie der Matrix bezüglich der "Gegenstandsweite"  $a$  bzw. der "Bildweite"  $b$  leicht zu verstehen.

## Einfache Beispiele

### Abbildung durch eine Linse

Vergleichen wir noch einmal mit der am Anfang hergeleiteten Matrix beim Durchgang durch eine dünne Linse. Die Brennweite des optischen Systems ist selbstverständlich die Brennweite der Linse  $f$  selbst. Wir haben dann also:

$$b - f = \delta b \quad \text{bzw.} \quad a - f = \delta a$$

$$\text{oder} \quad -\delta b/f = 1 - b/f \quad \text{bzw.} \quad -\delta a/f = 1 - a/f$$

Das Abbildungsgesetz lautet dann:

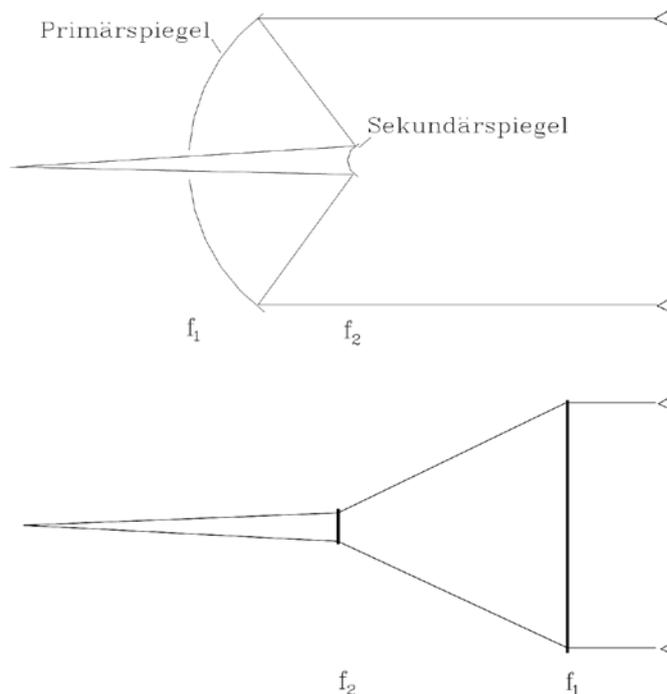
$$(a-f) \cdot (b-f) = f^2$$

oder

$$b = \frac{a \cdot f}{a - f} \quad \text{bzw.} \quad 1/f = 1/a + 1/b$$

Wir erhalten also das allgemein bekannte Linsengesetz. Die beiden Hauptebenen der Optik fallen zusammen mit dem Ort der Linse. Gleichung [8] repräsentiert somit einen viel allgemeineren Zusammenhang als die einfache Linsengleichung.

### Das Cassegrain-Teleskop



**Abb.5:** Abbildung in einem Cassegrain-Teleskop  
 Oben: Spiegelanordnung  
 Unten: äquivalente Linsenanordnung (Galileisches Fernrohr)

Wichtig ist auch der Fall eines Cassegrain-Teleskops (siehe Abb.5). Die Matrix vom Ort unmittelbar vor dem ersten Spiegel zum Ort unmittelbar hinter dem zweiten Spiegel ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1-d/f_1 & d \\ -1/f & 1-d/f_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} \end{aligned}$$

Der Bildfokus liegt also im Abstand von

$$b_f = f \cdot (1-d/f_1),$$

während der Gegenstandsfokus bei

$$a_f = f \cdot (1-d/f_2) \text{ liegt.}$$

Im konkreten Fall des KOSMA 3m Radioteleskops haben wir zum Beispiel:

$$f_1 = 1300 \text{ mm}, f_2 = -120 \text{ mm} \text{ und } d = 1185 \text{ mm}.$$

Wir haben damit für die Brennweite der Cassegrain-Optik:

$$f = 31,2 \text{ m}.$$

Der Bildfokus, also der Abstand der Bildebene des Teleskops vom Subreflektor liegt bei:

$$b_f = f \cdot (1 - d/f_1) = 2,76 \text{ m}.$$

Zieht man noch die Distanz  $d$  zwischen Haupt- und Subreflektor ab, dann findet man, daß die Bildebene des Teleskops 1,575 m hinter der Primärschüssel liegt, aber die zugehörige Hauptebene liegt 29,625 m vor der Schüssel!

Der Gegenstandsfokus, also der Fokuspunkt auf der Eingangsseite des Teleskops, liegt mit

$$a_f = f \cdot (1 - d/f_2) = 339,3 \text{ m}$$

weit vor dem Hauptreflektor. Ein Gegenstand in geringerem Abstand als  $a_f$  kann also mit dem Teleskop überhaupt nicht mehr abgebildet werden. Man sieht, die Verhältnisse sind einigermaßen überraschend, jedoch liefert die Matrix alle Informationen ohne größeren Aufwand.

## Die Lupe

Bei der Lupe wird ein „virtuelles“ Bild erzeugt. Das heißt, daß der Gegenstand innerhalb der einfachen Brennweite der Linse liegt. Damit wird von jedem Gegenstandspunkt ein divergentes Strahlenbündel aus der Linse austreten. Der Gegenstand habe die Größe  $G$  und befindet sich im Abstand  $g$  vor der Linse. Die Linse hat die Brennweite  $f$  und erzeugt ein Bild im Abstand  $b$  mit der Größe  $B$ . Wir können also ansetzen:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - b/f & g + b - g \cdot b/f \\ -1/f & 1 - g/f \end{bmatrix}$$

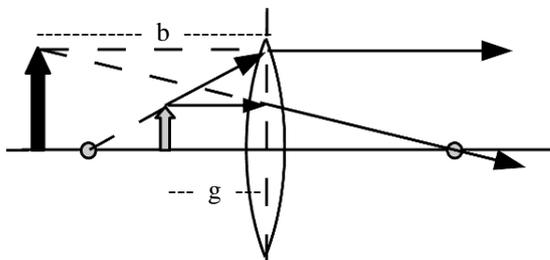


Abb.6: Die Lupe

Das Bild befindet sich im Abstand  $b = \frac{g - f}{f \cdot g}$ , was negativ ist, wenn  $g < f$ .

Die Größe  $B$  des Bildes ist damit gegeben durch:

$$B = \frac{|b|}{g} \cdot G = |b| \cdot \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{b} \right) \cdot G = \left( \frac{|b|}{f} - \frac{|b|}{b} \right) \cdot G = \left( 1 + \frac{|b|}{f} \right) \cdot G$$

Der Abstand zwischen dem Auge und der Position des Bildes sollte der optimalen Sehweite von  $d_0 = 25 \text{ cm}$  entsprechen. Normalerweise hält man die Linse möglichst nahe vor das Auge, um ein möglichst großes Gesichtsfeld zu erhalten. Damit wird  $-b = d_0$ . Andererseits wäre der optimale Sehwinkel für den Gegenstand ohne Linse gegeben durch:  $m = G/d_0$ . Mit Lupe erscheint er unter dem Sehwinkel:  $m' = B/|b| = B/d_0$ . Das Verhältnis definiert also die Vergrößerung durch die Lupe mit:

$$V = m'/m = G'/G = 1 + |b|/f = 1 + d_0/f$$

Eine typische Lupe hat eine Brennweite von ca. 5 cm, so daß die Vergrößerung bei etwa dem 6-fachen liegt.

## Fernrohr (Kepler)

Im Fernrohr haben wir es mit zwei Linsen(-systemen) zu tun. Entscheidend für seine Funktion ist, daß ein Gegenstand in großer Entfernung, der ohne Fernrohr also einen kleinen Sehwinkel am Auge erzeugt, durch das Fernrohr groß erscheint. Wir betrachten das Kepler'sche Fernrohr (siehe Bild). Wir müssen für die Betrachtung die Transformationsmatrix vom Eingang des Objektivs, deren Brechung mit der Brennweite  $f_1$ , bis zum Okular im Abstand  $d$  und dann durch das Okular mit der Brennweite  $f_2$  finden. Gefragt ist dann der Sehwinkel, unter dem die Strahlen, die aus dem Unendlichen kommen, das Okular verlassen.

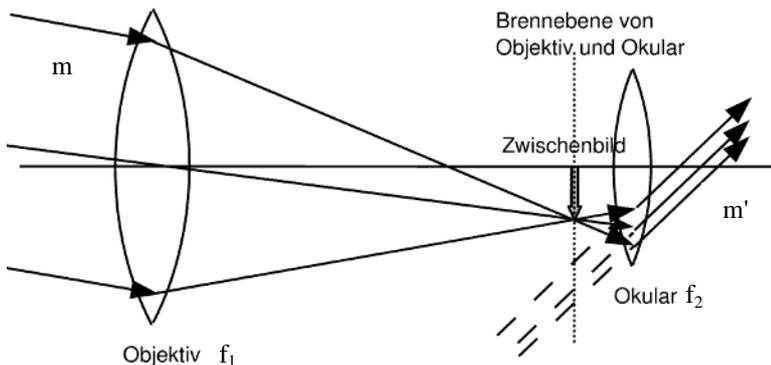


Abb.7: Kepler'sches Fernrohr

Die Gesamtmatrix ist also:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -1/f_2 & 1 - d/f_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - d/f_1 & d \\ -1/f & 1 - d/f_2 \end{bmatrix}$$

mit  $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}$

Da die Abbildung vom Unendlichen ins Unendliche gehen soll, muß gelten, daß das Zwischenbild am Fokuspunkt beider Linsen liegen muß. Somit haben wir:  $d = f_1 + f_2$ . Daraus folgt, daß  $f = \infty$ , und somit finden wir für die Steigung der Ausgangsstrahlen:

$$m' = \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) \cdot m$$

Das Verhältnis der Eingangs- zur Ausgangssteigung, also die Vergrößerung  $V$  ist also:

$$V = m'/m = -f_1/f_2$$

Das Bild steht wegen des Minus-Zeichens auf dem Kopf! Deshalb sind in den üblichen Ferngläsern Umkehrprismen eingebaut, damit man ein "normales" Bild bekommt.

Anm.: Wir haben hier nicht berücksichtigt, daß unser Auge am liebsten auf einen bestimmten Abstand anstelle auf das Unendliche adaptiert. Wenn man dies berücksichtigt, ergibt sich aber nur eine marginale Differenz zu dem hier erzielten Ergebnis.

## Mikroskop

Im Mikroskop haben wir es mit einem Objektiv kurzer Brennweite und einem Okular mit ebenfalls kurzer Brennweite zu tun, das als Lupe eingesetzt wird. Der Abstand vom Objekt zum Objektiv sei  $g$ , seine Größe wieder  $G$ . Das Objektiv habe die Brennweite  $f_1$ , das Okular die Brennweite  $f_2$ . Der Abstand zum Okular sei  $d$ . Wir können Die Transformationsmatrix bis zum Ausgang des Okulars also wie oben angeben durch:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - d/f_1 & g + d - g \cdot d/f_1 \\ -1/f_1 - 1/f_2 + d/f_1 \cdot f_2 & (1 - g/f_1) \cdot (1 - d/f_2) - g/f_2 \end{bmatrix}$$

Wie oben sollten die Strahlen, die aus dem Okular austreten und die von einem Punkt des Objekts ausgehen, parallel sein. Das bedeutet, wie zuvor, daß der Abstand  $d = b_1 + f_2$  sein soll. Die Steigung der ausfallenden Strahlen ist wiederum gegeben durch:  $m' = G/f$

Man bezeichnet den Abstand zwischen den beiden Brennpunkten von Objektiv und Okular als Tubuslänge  $t$ . Es gilt also, daß  $b_1 = f_1 + t$ . Wir haben deshalb für  $G/f$ :

$$\frac{G}{f} = G \cdot \left( \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{b_1 + f_2}{f_1 \cdot f_2} \right) = \frac{G}{f_2} \cdot \left( 1 - \frac{b_1}{f_1} \right) = -\frac{G}{f_2} \cdot \frac{t}{f_1}$$

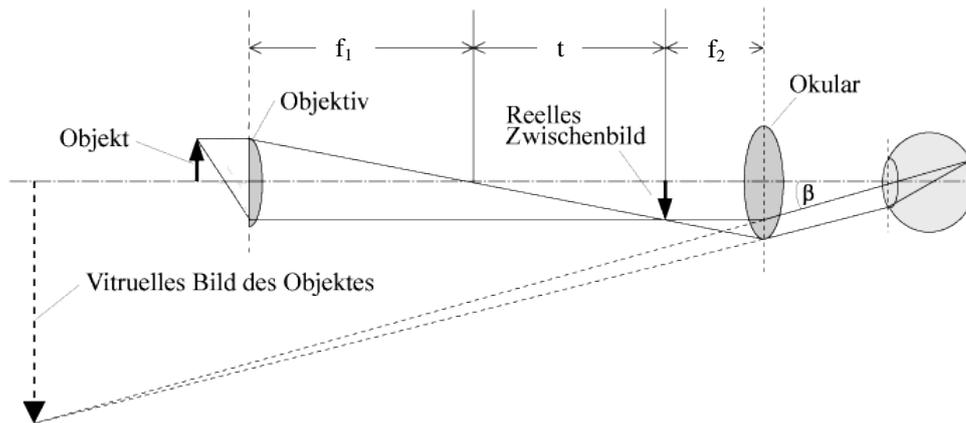


Abb.8: Das Mikroskop

Mit bloßem Auge im Abstand der optimalen Sehweite  $d_0$  wäre der Sehwinkel gegeben durch:  $m_0 = G/d_0$ . Die Vergrößerung ist also:

$$V = \frac{m'}{m_0} = -\frac{d_0}{f_2} \cdot \frac{t}{f_1}$$

Das Vorzeichen ist wieder negativ, weil das Bild ebenfalls auf dem Kopf steht.

## Strahlengang im Resonator

Gehen wir nun zum interessanten Fall eines Laser-Resonators über. Wir betrachten der Einfachheit halber die Spiegelungen an 2 sphärischen Spiegeln als Durchgang durch eine unendliche Serie von Linsen mit den beiden Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$ . Der Abstand zwischen den Linsen ist immer gleich  $d$  (siehe Abb.9). Man könnte ebenso unter Verwendung der Spiegelungsmatrix auch mit den Spiegeln rechnen, jedoch kann man sich die zusätzlichen Spiegelungsmatrizen ersparen ohne dabei die wesentlichen Informationen zu verlieren.

Zur Behandlung nur eines vollständigen Umlaufs durch den Resonator beginnen wir an der Stelle  $z$  im Innern des Resonators, laufen die Strecke  $d-z$  bis zur Linse  $L_2$ , gehen durch die Linse  $L_2$  und weiter bis und durch  $L_1$ , um dann nach Zurücklegung der Strecke  $z$  wieder an der Ausgangsstelle  $z$  anzukommen. Dafür haben wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(z) &= \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d-z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} g - [z-z_0]/f & f \cdot \{1 - g^2 + [z-z_0]^2/f^2\} \\ -1/f & g + [z-z_0]/f \end{bmatrix} \end{aligned} \quad [10]$$

mit, da  $f_i = r_i/2$ ,

$$1/f = 1/f_1 + 1/f_2 - d/(f_1 \cdot f_2) = 2/d \cdot (g_1 + g_2 - 2 \cdot g_1 \cdot g_2),$$

$$g_i = 1 - d/r_i = 1 - d/(2 \cdot f_i), \quad f_i = \frac{1}{2} \cdot d / (1 - g_i) \quad i = 1, 2$$

$$g = 2 \cdot g_1 \cdot g_2 - 1,$$

$$z_0 = d \cdot f / f_1 \cdot g_2 = \frac{d \cdot g_2 \cdot (1 - g_1)}{g_1 + g_2 - 2 \cdot g_1 \cdot g_2},$$

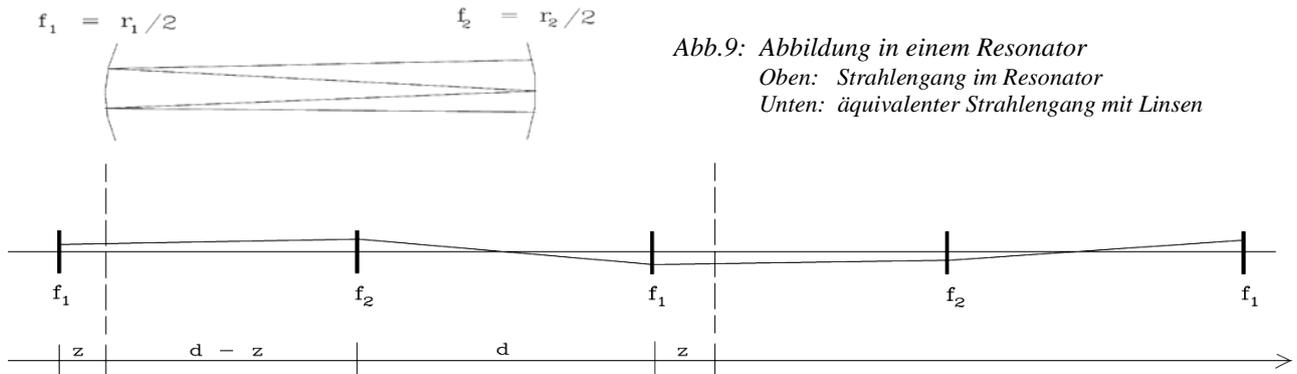


Abb.9: Abbildung in einem Resonator  
Oben: Strahlengang im Resonator  
Unten: äquivalenter Strahlengang mit Linsen

$r_i$  sind die Krümmungsradien der Spiegeloberflächen, die ja bekanntlich gleich den doppelten Brennweiten der Hohlspiegel sind.

Betrachtet man viele Durchläufe  $n$  durch den Resonator, so ist die Matrix  $T$  entsprechend oft mit sich selbst zu multiplizieren. Also:

$$T_n = T^n,$$

was sich im Prinzip natürlich auch Schritt für Schritt ausmultiplizieren läßt. Es gibt aber einen einfacheren Weg, den wir hier verwenden wollen.

Bedenkt man, daß das Licht in einem optischen Resonator auch nach beliebig vielen Umläufen niemals den Resonator verlassen sollte, dann bedeutet dies für unsere Matrix, daß nach jeder Zahl von Umläufen der Abstand des Aufpunktes  $x_n$ , und damit auch die Steigung  $m_n$  immer beschränkt bleiben müssen:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ m_n \end{bmatrix} = T_n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ m_0 \end{bmatrix}, \quad T_n = T^n$$

$$\text{mit } |x_n| = |(T_n)_{11} \cdot x_0 + (T_n)_{12} \cdot m_0| < G_x$$

$$\text{und } |m_n| = |(T_n)_{21} \cdot x_0 + (T_n)_{22} \cdot m_0| < G_m$$

für alle  $n$  mit  $G_x$  und  $G_m$  beliebig große Zahlen.

Die Zahl  $n$  kann irgendeine, beliebige positive ganze Zahl sein. Die  $G$  sind als obere Schranken reell und endlich. Da für alle beliebigen Anfangsbedingungen  $x_0$  und  $m_0$  diese Ungleichung erfüllt sein muß, müssen also die Komponenten  $(T_n)_{ij}$  der Matrix  $T_n$  für beliebige  $n$  beschränkt bleiben.

Zur Auswertung dieser Bedingung wenden wir an, was wir von der linearen Algebra gelernt haben. Wir suchen eine unitäre Matrix  $U$ , für die gilt:

$$U \cdot U^{-1} = U^{-1} \cdot U = 1, \quad \text{Det} \|U\| = 1 \quad \text{und}$$

$$U \cdot T \cdot U^{-1} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = t$$

$$\text{bzw: } T = U^{-1} \cdot t \cdot U$$

$U$  diagonalisiert also unsere Matrix  $T$ . Aus der Unitarität finden wir:

Wenn  $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  dann ist  $\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$  [11]

Die Werte  $t_1, t_2$  können wir leicht finden durch die Lösung der Determinantengleichung

$$\text{Det} \|\mathbf{T} - t \cdot \mathbf{1}\| = 0$$

Daraus und aus Gl.[10] gewinnen wir die quadratische Gleichung in  $t$ :

$$t^2 - 2 \cdot g \cdot t + 1 = 0.$$

Die Lösungen sind:

$$t_{1,2} = g \pm \sqrt{g^2 - 1}, \quad [12]$$

Wir haben nun:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n &= \mathbf{T}^n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \dots \cdot \mathbf{T} \\ &= [\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{U}] \cdot [\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{U}] \cdot \dots \cdot [\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{U}] = \\ &= \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{t}^n \cdot \mathbf{U} \end{aligned}$$

Für eine Diagonalmatrix gilt aber generell:

$$\mathbf{t}^n = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} t_1^n & 0 \\ 0 & t_2^n \end{bmatrix}, \quad [13]$$

so daß es leicht ist, die Matrix  $\mathbf{T}_n = \mathbf{T}^n$  zu finden wenn man die Matrizen  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{U}$  kennt. Behandeln wir zunächst einmal den Fall von zwei reellen Lösungen  $t_1$  und  $t_2$ , also den Fall  $|g| \geq 1$ . In diesem Fall können wir schreiben:

$$t_1 = \pm e^s \quad \text{und} \quad t_2 = \pm e^{-s}, \quad s \geq 0 \quad [14]$$

mit  $|g| = \cosh[s]$  und  $\sqrt{g^2 - 1} = \sinh[s]$ .

Positive  $t_i$  haben wir für  $g > +1$  und negative  $t_i$  für  $g < -1$ . Aus der Gleichung

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}$$

können wir nun die Transformationsmatrix  $\mathbf{U}$  bestimmen mit:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot p}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -(z - z_0 + p) \\ 1 & -(z - z_0 - p) \end{bmatrix} \quad [15]$$

und 
$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot p}} \cdot \begin{bmatrix} -(z - z_0 - p) & (z - z_0 + p) \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

mit  $p = f \cdot \sinh[s]$

Mit der Kenntnis von  $\mathbf{U}$  können wir nun auch leicht die Matrix  $\mathbf{T}_n$  bestimmen. Dazu beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Position  $z - z_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n(z_0) &= \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{t}^n \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \pm e^s & 0 \\ 0 & \pm e^{-s} \end{bmatrix}^n \cdot \mathbf{U} = \\ &= (\pm 1)^n \cdot \begin{bmatrix} \cosh[n \cdot s] & -\sinh[n \cdot s] \cdot p \\ -\sinh[n \cdot s] / p & \cosh[n \cdot s] \end{bmatrix} \quad [16] \end{aligned}$$

Man sieht, daß die Matrixelemente mit zunehmendem  $n$  kontinuierlich anwachsen und für  $n \rightarrow \infty$  divergieren. Das bedeutet aber, daß für den Fall  $|g| > 1$  kein stabiler Resonator mehr vorliegen kann, da bei endlichen Spiegeln die Strahlen nach einigen Umläufen die Spiegel auf jeden Fall nicht mehr treffen würden.

Betrachten wir noch gesondert den Fall  $g = \pm 1$ . Für  $g = +1$  gilt nach der Definition von  $g$  in Gl.[10], daß entweder

$$r_1 = r_2 = \infty \quad \text{oder} \quad d = r_1 + r_2$$

ist. (Den trivialen Fall  $d = 0$  brauchen wir hier nicht zu behandeln.) Der erste Fall ist der sogenannte "planparallele Resonator" und der zweite Fall der "konzentrische Resonator". Im ersten Fall haben wir, wie man leicht aus Gl.[10] für  $z = z_0$  findet, die Abbildungsmatrix

$$\mathbf{T}_n(z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot n \cdot d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Abstand  $x_n$  von der  $z$ -Achse verhält sich also wie:

$$x_n = x_0 + 2 \cdot n \cdot d \cdot m_0$$

$x_n$  bleibt also nur für die spezielle Anfangsbedingung  $m_0 = 0$  beschränkt. Da diese Bedingung mit hoher Genauigkeit praktisch kaum einzuhalten ist, muß also der planparallele Resonator als nur bedingt stabil betrachtet werden. Dem entspricht auch die Erfahrung, die zeigt, daß für hohe Umlaufzahlen der Strahl in einem solchen Resonator immer die Tendenz zeigt wegzulaufen (siehe weiter unten).

Im zweiten Fall,  $d = r_1 + r_2$ , finden wir:

$$\mathbf{T}_n(z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n/f & 1 \end{bmatrix}$$

Hier haben wir für die Steigung:

$$m_n = -n/f \cdot x_0 + m_0$$

Auch hier kann nur dann eine stabile Situation vorliegen, wenn der Anfangsabstand  $x_0$  exakt gleich Null ist, was ebenso schwierig zu gewährleisten ist, wie die Bedingung für den planparallelen Resonator.

Der Fall  $g = -1$  muß hier auch noch diskutiert werden. In diesem Fall ist entweder

$$d = r_1 \quad \text{oder} \quad d = r_2 \quad \text{oder} \quad \text{beides.}$$

Für  $d = r_1 \neq r_2$  haben wir für  $f$ :

$$1/f = 2 \cdot (r_2 - d) / (r_2 \cdot d) \neq 0,$$

so daß wir als Abbildungsmatrix finden:

$$\mathbf{T}_n(z_0) = (-1)^n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n/f & 1 \end{bmatrix}$$

Der Fall  $d = r_2 \neq r_1$  ist identisch, wie man durch Vertauschen der Indizes sofort sieht. Auch dieser Fall ist also, wie schon zuvor der konzentrische Resonator, als nur bedingt stabil anzusehen.

Die letzte Möglichkeit

$$d = r_1 = r_2$$

ist als "symmetrischer konfokaler Resonator", oder auch kurz als "konfokaler Resonator" bekannt, da die Foki der beiden Spiegel in der Mitte des Resonators zusammenfallen. Dafür haben wir:

$$1/f = 0$$

und die Matrix ist:

$$\mathbf{T}_n(z_0) = (-1)^n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dieser Resonator ist also vollkommen stabil, da er völlig unabhängig von den Startbedingungen zu einem Strahlenverlauf führt, der immer innerhalb des Resonators verbleibt.

Wir schließen also, daß für  $g = \pm 1$  kein wirklich stabiler Resonator vorliegt außer für den Fall des symmetrischen konfokalen Resonators ( $g_1 = g_2 = 0$ ). Dennoch ist der plan/plan Resonator durchaus gebräuchlich, da man bei endlicher Transmission durch die Spiegel auch in Kauf nehmen kann, daß nach einer gewissen, wenn auch großen Zahl von Durchläufen der Strahl den Resonator verläßt. (Siehe hierzu auch das Thema "Finesse" weiter unten. So ist z.B. mit hundert Durchläufen durchaus noch eine akzeptable Finesse erzielbar, mit der man gute Ergebnisse erzielen kann.) Ein Sonderfall sind hier die Interferenzfilter, bei denen der Abstand zwischen den beiden Spiegeln so klein ist, daß ein Weglaufen des Strahls praktisch irrelevant ist.

Bleibt noch der Fall  $|g| < 1$ . In diesem Fall können wir schreiben:

$$t_1 = e^{i \cdot \psi} \quad \text{und} \quad t_2 = e^{-i \cdot \psi} \quad [17]$$

mit  $\sin[\psi] = \sqrt{[1-g^2]}$  und  $\cos[\psi] = g$ , da  
 $\sqrt{[g^2-1]} = i * \sqrt{[1-g^2]}$ .

Für  $\psi$  gilt also:

$$0 < \psi \leq \pi$$

Da nun  $g^2-1$  kleiner als Null ist, ersetzen wir  $p$  in obigen Gleichungen durch:

$$p = f * \sqrt{[g^2-1]} = i * f * \sqrt{[1-g^2]} = i * z_R$$

$$\text{oder} \quad z_R = f \cdot \sqrt{[1-g^2]} = f \cdot \sin[\psi] = d \cdot \frac{\sqrt{[g_1 \cdot g_2 \cdot (1-g_1 \cdot g_2)]}}{g_1 + g_2 - 2 \cdot g_1 \cdot g_2} \quad [18]$$

Für den  $\sin[\psi]$  bzw. den  $\cos[\psi]$  haben wir dann:

$$\sin[\psi] = 2 \cdot \sqrt{[g_1 \cdot g_2 \cdot (1-g_1 \cdot g_2)]}, \quad \cos[\psi] = 2 \cdot g_1 \cdot g_2 - 1$$

Für die Matrix  $\mathbf{U}$  finden wir dann:

$$\mathbf{U} = \frac{e^{-i \cdot \pi/4}}{\sqrt{2 \cdot z_R}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -(z - z_0 + i \cdot z_R) \\ 1 & -(z - z_0 - i \cdot z_R) \end{bmatrix} \quad [19]$$

$$\text{und} \quad \mathbf{U}^{-1} = \frac{e^{-i \cdot \pi/4}}{\sqrt{2 \cdot z_R}} \cdot \begin{bmatrix} -(z - z_0 - i \cdot z_R) & +(z - z_0 + i \cdot z_R) \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir finden für die Abbildungsmatrix  $T_n$  nach  $n$  Umläufen:

$$\mathbf{T}_n(z) = \begin{bmatrix} \cos[n \cdot \psi] - (z - z_0)/z_R \cdot \sin[n \cdot \psi] & \{1 + [(z - z_0)/z_R]^2\} \cdot \sin[n \cdot \psi] \cdot z_R \\ -\sin[n \cdot \psi]/z_R & \cos[n \cdot \psi] + (z - z_0)/z_R \cdot \sin[n \cdot \psi] \end{bmatrix}$$

An der Stelle  $z = z_0$  haben wir dann:

$$\mathbf{T}_n(z_0) = \begin{bmatrix} \cos[n \cdot \psi] & \sin[n \cdot \psi] \cdot z_R \\ -\sin[n \cdot \psi]/z_R & \cos[n \cdot \psi] \end{bmatrix} \quad [20]$$

Da der Cosinus und der Sinus immer beschränkt bleiben, haben wir es auf jeden Fall mit einer stabilen Resonatorconfiguration zu tun. Egal, wieviel Umläufe unser Strahl macht, er wird auch bei Spiegeln mit endlichen Durchmessern niemals den Resonator verlassen, und dies gilt unabhängig von den Anfangswerten  $x_0$  und  $m_0$ .

## Das Stabilitätskriterium von Resonatoren

Wir können nach dem zuvor diskutierten also bei einem stabilen (oder bedingt stabilen) Resonator schreiben:

$$t_{1,2} = \cos[\psi] \pm i \cdot \sin[\psi]$$

mit  $\sin[\psi] = z_R/f = \sqrt{[1-g^2]} > 0$  bei  $|g| < 1$ ,

während  $\sin[\psi] = 0$  für  $d = r_1 = r_2$

Für  $\psi$  finden wir wegen

$$\cos(\psi) = 2 \cdot \cos^2(\psi/2) - 1 \quad \text{und} \quad g = 2 \cdot g_1 \cdot g_2 - 1:$$

$$\psi = 2 \cdot \arccos[\sqrt{|g_1 \cdot g_2|}] \quad [21]$$

Wegen der Bedingung

$$0 \leq g^2 \leq 1$$

haben wir außerdem:

$$g^2 \leq 1 \quad \text{oder} \quad 4 \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot (1 - g_1 \cdot g_2) \geq 0$$

und damit

$$0 \leq g_1 \cdot g_2 < 1.$$

Diese Gleichung ist in der einschlägigen Literatur bekannt als das "Stabilitätskriterium für optische Resonatoren". Die Ungleichung sagt aus, daß das Strahlungsfeld nur in solchen Resonatoren dauerhaft verbleibt, für die sowohl die Krümmungsradien der Spiegel als auch der Abstand zwischen ihnen richtig gewählt sind. Anderenfalls verläßt der Strahl irgendwann den Resonator.

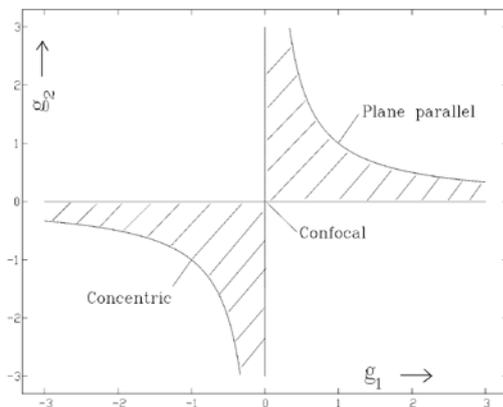


Abb.10: Stabilitätsbereiche eines Laserresonators

In Abb.10 ist der Bereich schraffiert dargestellt, der zu stabilen Resonatoren führt. Als Abszisse ist  $g_1 = 1 - d/r_1$  und als Ordinate  $g_2 = 1 - d/r_2$  verwendet. Der Stabilitätsbereich wird von den Achsen und Hyperbeln begrenzt, wobei die Achsen und die Hyperbeln selbst nicht mehr zum Stabilitätsbereich gehören. Eine Ausnahme stellt der Punkt (0,0) dar, der den konfokalen Resonator repräsentiert. Man sollte nicht vergessen, daß bei der bisherigen Behandlung keinerlei Beugungseffekte einbezogen wurden. Wie Beugungsverluste in einem Resonator noch eine Rolle spielen, ist allerdings nicht Gegenstand der augenblicklichen Betrachtung. Der Punkt (1,1) repräsentiert einen Resonator mit ebenen Spiegeln. Er gehört auch nicht mehr zum Stabilitätsbereich. Ebenso gehört der konzentrische Resonator an der Stelle (-1,-1) nicht mehr dazu. Solche Resonatoren sind also nicht empfehlenswert. Nebenbei bemerkt, ein plan/plan-Resonator ist auch aus technischen Gründen ungünstig, zum Beispiel wegen der Schwierigkeit, beide Spiegel exakt parallel zueinander zu justieren. Ebenso ist es beim konzentrischen Resonator nahezu unmöglich, die beiden Krümmungsmittelpunkte der Spiegel wirklich exakt aufeinander zu legen. Wie schon erwähnt, stellt der Punkt (0,0) eine Ausnahme dar. Die Brennpunkte beider Spiegel liegen an der gleichen Stelle im Resonator. Dieser Resonator ist eine der beliebtesten Anordnungen zum Beispiel zur Untersuchung von Laserspektren mit Hilfe von Fabry-Perot Interferometern. Er ist besonders stabil, kleine Veränderungen von Spiegelbrennweiten oder des Spiegelabstandes werden ohne weiteres verkraftet. Es gibt auch noch andere Vorzüge des konfokalen Resonators, auf die wir später noch zurückkommen wollen.

Wichtig ist hier noch, daß es zu jeder Spiegelkombination innerhalb des Stabilitätsbereichs eine beliebige Anzahl von äquivalenten Spiegelkombinationen gibt, die alle den gleichen Winkel  $\psi$  aufweisen, und somit einen identischen Strahlenverlauf erzeugen. Hierzu muß lediglich das Produkt von  $g_1$  und  $g_2$  erhalten blei-

ben. Ein Spezialfall ist ein Resonator, der aus zwei Spiegeln mit gleichen Krümmungsradien besteht. Dabei muß gelten:

$$g_1 \cdot g_2 = g_0^2 \quad \text{mit} \quad g_0 = 1 - d'/r_0$$

wobei  $r_0$  der Krümmungsradius der Ersatzspiegel und  $d'$  der neue Spiegelabstand ist. Um vollständige Äquivalenz zu erreichen, also um gleichen Winkel  $\psi$  und gleiche Rayleigh-Länge  $z_R$  gleichzeitig zu erzeugen, müssen wir den noch verbleibenden freien Parameter der Ersatz-Cavity - die Länge  $d'$  - ebenfalls noch anpassen. Da

$$z_R = f \cdot \sin(\psi) = f \cdot \sqrt{1-g^2},$$

müssen wir also für eine identische effektive Brennweite der Spiegelanordnung sorgen. Wegen

$$f = \frac{1}{2} \cdot d / [g_1 + g_2 - 2 \cdot g_1 \cdot g_2] = \frac{1}{2} \cdot d' / [g_0 \cdot (1 - g_0)]$$

finden wir also für den neuen Spiegelabstand  $d'$ :

$$d' = 2 \cdot d \cdot \frac{\sqrt{g_1 \cdot g_2} [1 - \sqrt{g_1 \cdot g_2}]}{g_1 + g_2 - 2 \cdot g_1 \cdot g_2} \quad \text{und} \quad r_0 = 2 \cdot d \cdot \frac{\sqrt{g_1 \cdot g_2}}{g_1 + g_2 - 2 \cdot g_1 \cdot g_2}$$

Unter Verwendung von Ersatzspiegelparametern vereinfachen sich manche Rechnungen erheblich. Z.B. sind dann die Rayleigh-Länge und die Position der Waist gegeben durch:

$$z_R = \frac{d'}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+g_0}{1-g_0}} = \sqrt{\frac{d'}{2} \cdot (r_0 - \frac{d'}{2})} \quad \text{und} \quad z_0 = \frac{d'}{2}$$

In der Darstellung des Stabilitätskriteriums liegen dann alle Werte auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden mit der Steigung +1. Der konzentrische, konfokale und der plan-parallele Resonator sind dabei mit erfaßt. Man beachte jedoch, daß sich wegen der veränderten Länge des Resonators die Resonanzfrequenzen ändern (siehe weiter unten).

## Resonanzbedingung

Wir haben jetzt zwar eine Bedingung für einen optisch stabilen Resonator gefunden, aber die Frage, wie das Strahlungsfeld in einem Laser-Resonator denn nun wirklich aussieht ist noch nicht beantwortet. Dazu brauchen wir noch die zusätzliche Bedingung, daß sich im Resonator stehende Wellen ausbilden, daß also die Strahlen mit sich selbst konstruktiv interferieren. Es gilt die Bedingung, daß jeder Strahl sich nach einem bestimmten Zahl  $N$  von Umläufen durch den Resonator selbst reproduziert. Der Begriff "Strahl" ist dabei natürlich sehr fragwürdig, aber es ist sicherlich vernünftig, diese Strahlen als Trajektorien der Wellenfronten zu verstehen. Diese stehen immer senkrecht auf den Wellenfronten (im isotropen Medium), so daß das Bild von "Mikadostäbchen" tatsächlich eine gewisse Ähnlichkeit mit der Richtung der Wellenvektoren besitzt. Die Frage bleibt, wie groß diese Zahl  $N$  denn nun ist. Wir haben mit den gefundenen Eigenwerten als Bedingung der Selbstreproduktion:

$$\mathbf{T}^N = \underline{1}. \quad \text{Daraus folgt:} \quad \text{Exp}\{i \cdot N \cdot \psi\} = 1, \quad N = 1, 2, 3, \dots,$$

und es muß gelten:

$$N \cdot \psi = Q \cdot 2 \cdot \pi \quad \text{mit} \quad Q = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Wir haben somit:

$$\psi / (2\pi) = 1/\pi \cdot \arccos\sqrt{g_1 \cdot g_2} = Q/N$$

Dieser Ausdruck ist vom Betrage her immer kleiner oder gleich 1/2, da gilt

$$0 \leq g_1 \cdot g_2 \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq \psi \leq \pi/2.$$

Deshalb muß  $N$  immer größer als  $2 \cdot Q$  sein. Es ist nicht sinnvoll,  $N$  und  $Q$  mit einem gemeinsamen Teiler  $t$  ( $t > 1$ , ganz) zuzulassen, da die Selbstreproduktion dann schon bei kleineren  $N' = N/t$  bzw.  $Q' = Q/t$  bereits gegeben wäre. Mit der Forderung der konstruktiven Interferenz muß außerdem gelten:

$$N \cdot 2 \cdot d = m \cdot \lambda_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad [22]$$

$\lambda_m$  ist die Wellenlänge des Lichts.  $m$  ist eine (immer sehr große) ganze Zahl, die angibt, wie groß die zurückgelegte Länge in Einheiten der Wellenlänge tatsächlich ist. Interessiert man sich für die Frequenzen, bei denen konstruktive Interferenz stattfindet, dann hat man:

$$v_m = c/\lambda_m = c/(2 \cdot d) \cdot m/N = c/(2 \cdot d) \cdot (p + q \cdot Q/N)$$

mit  $m = p \cdot N + q \cdot Q$  und  $q = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Die Umformung von  $m$  in zwei solche Produkt-Summanden ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich, solange  $m \geq [N-1] \cdot [Q-1]$  ist (bei positiven  $N$  und  $Q$ ,  $N$  und  $Q$  ohne gemeinsamen Teiler). Wenn man nun noch den Ausdruck für  $Q/N$  von oben einsetzt, erhält man den einfachen Ausdruck:

$$\begin{aligned} v_{p,q} &= c/(2 \cdot d) \cdot \{p + q \cdot \psi/(2 \cdot \pi)\} & [23] \\ &= c/(2 \cdot d) \cdot \{p + q \cdot 1/\pi \cdot \arccos \sqrt{g_1 \cdot g_2}\} \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung, die einen Satz von diskreten Eigenfrequenzen des Resonators definiert. Bei Änderung von  $p$  um 1 verändert sich die Eigenfrequenz um  $c/(2 \cdot d)$ . Dies bedeutet, daß z.B. für  $q = 0$  die Länge  $2 \cdot d$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\lambda$  ist, daß also die Phase des Lichtes an jedem Auftreffpunkt auf einem der Spiegel identisch ist. Für  $q \neq 0$  gilt dies nicht! Der Abstand zwischen zwei Resonanzen bei Änderung von  $p$  um „1“ wird „longitudinaler Modenabstand“ genannt. Zu jeder möglichen Eigenfrequenz existiert eine Feldverteilung im Resonator, die „Mode“ genannt wird. Wie diese Feldverteilung genau aussieht, können wir erst später diskutieren, denn dazu müssen wir letztendlich die Maxwell-Gleichungen zu Rate ziehen.

Ändern wir  $q$  um 1, dann ändert sich die Eigenfrequenz um deutlich weniger als  $c/(2 \cdot d)$ , da  $\psi/(2 \cdot \pi)$  immer kleiner gleich  $1/2$  ist. Wieviel das ausmacht hängt ausschließlich von der Spiegelgeometrie ab. Die Krümmung der Spiegel und der Abstand zwischen ihnen haben somit erheblichen Einfluß! Betrachten wir einmal den Fall eines plan/plan-Resonators.  $\psi$  ist in diesem Falle gleich Null, es gibt nur Eigenfrequenzen als Vielfache des longitudinalen Modenabstandes. Das gleiche gilt im Falle des konzentrischen Resonators. Anders ist die Situation beim konfokalen Resonator. Da  $r_1 = r_2 = d$ , haben wir  $\psi = \pi$ . Damit ändert sich bei einer Änderung von  $q$  um 1 die Eigenfrequenz um  $c/(4 \cdot d)$ . Die Eigenfrequenzen scheinen doppelt so dicht wie in den beiden anderen Fällen. Bei beliebigem  $\psi$  (je nach Abstand und Brennweite der Spiegel) erhalten wir noch kleinere Abstände zwischen den sogenannten „transversalen Moden“. Dadurch besteht zum Beispiel beim Betrieb eines Lasers die Möglichkeit, daß viele Moden mit sehr eng benachbarten Eigenfrequenzen gleichzeitig anschwingen können. Der Laser wäre dadurch als spektral „saubere“ Lichtquelle nicht mehr geeignet.

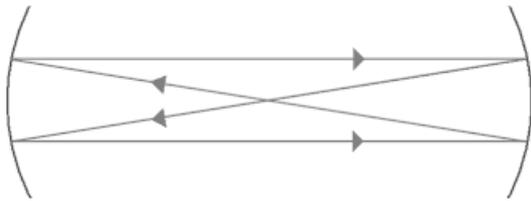
Aber auch ohne transversale Moden verbleiben immer noch die longitudinalen Moden. Deren Abstand kann man nur dadurch beeinflussen, indem man den Spiegelabstand verändert. Verhindern kann man das Anschwingen von zusätzlichen longitudinalen Moden nur dadurch, daß man mit der Frequenz sich ändernde Verluste in den Resonator einbaut, Prismen zum Beispiel. Dadurch ist es möglich, daß nur die longitudinale Mode als einzige anschwingt, bei der die Verluste am geringsten sind. Häufig reichen simple Prismen dafür nicht aus, man benötigt zusätzliche kleine Resonatoren, die z.B. aus teilverspiegelten Planparallelplatten bestehen können, sogenannten „Etalons“, die innerhalb des Laser-Resonators für eine zusätzliche Frequenzselektion sorgen. Das geht natürlich grundsätzlich auch für die transversalen Moden, aber deren Unterdrückung ist wegen des viel kleineren Modenabstandes viel schwieriger zu erreichen.

Oben wurde erwähnt, daß der konfokale Resonator besonders gerne verwendet wird, obwohl er spektral nicht ganz so geeignet erscheint wie der plan/plane oder der konzentrische Resonator. Die Vorteile der erheblich besseren Stabilität wiegen allerdings den nur halb so großen Frequenzabstand der Moden mehr als auf. Bis auf die indiskutablen Resonatoren (planparallel und konzentrisch) haben alle anderen Resonatoren noch dichter liegende Eigenfrequenzen. Dadurch ist es sehr schwierig, eindeutige Aussagen beim Einsatz als spektrales Analyseinstrument zu machen, da man nie sicher sein kann, daß nicht diverse transversale Moden mit zum

Resonanzverhalten des Resonators beitragen. Als Analyseninstrument wäre ein solcher Resonator praktisch wertlos.

Trotz aller Mathematik zuvor, es gilt nach wie vor, daß der Strahl bereits nach einem einmaligen Umlauf sich reproduzieren muß, wenn die Einkopplung exakt auf der Achse mit der Steigung 0 erfolgt. Dies entspricht der "üblichen" Betrachtungsweise von optischen Resonatoren, wobei dann natürlich auch nur Eigenfrequenzen als ganzzahlige Vielfache von  $c/(2 \cdot d)$  herauskommen. Wie sich bei nicht-axialer Einstrahlung die Situation verändert, sei zur Illustration am Fall eines konfokalen Fabry-Perot (siehe Abb.11) demonstriert.

Wir haben  $d = r_1 = r_2$ . Das ergibt für  $g_1$  und  $g_2$  einen Wert von 0. Der Winkel  $\psi$  wird dadurch gleich  $\pi$ , und der Frequenzabstand der transversalen Moden wird dadurch gleich  $c/(4 \cdot d)$ . Dem entspricht ein Strahlengang im Resonator, wie er in Abb.11 dargestellt ist. es ist unmittelbar einsichtig, daß die optische Weglänge bis zur Reproduktion gleich  $4 \cdot d$  ist. Dies gilt natürlich nicht mehr, wenn genau axial eingekoppelt wird. Man kann also durch sorgfältige axiale Einkopplung die zusätzliche Resonanz verhindern.



**Abb.11:** Geometrischer Strahlengang in einem konfokalen Resonator

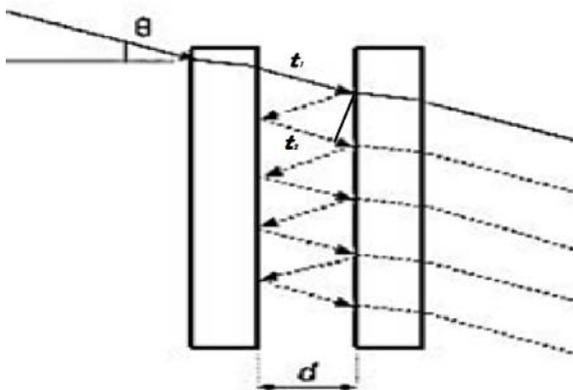
### Der planparallele Resonator

Den Sonderfall des planparallelen müssen wir noch getrennt betrachten, da er doch sehr häufig zum Einsatz kommt. Für ihn gilt  $g_{1,2} \rightarrow 1$ . Wir hatten schon festgestellt, daß dies kein wirklich stabiler Resonator ist, dennoch wollen wir ihn noch etwas mehr charakterisieren (siehe dazu Abb.12). Wir gehen davon aus, daß wir einen Strahl unter einem Winkel  $\theta$  auf den ersten Spiegel einfallen lassen. Zwischen zwei Strahlen nach einem vollständigen Umlauf gilt ein Weglängenunterschied von

$$D = t_1 + t_2,$$

wobei der Weg vom Auftreffpunkt bis zum 2-ten Spiegel gegeben ist durch:

$$t_1 = d / \cos[\theta]$$



**Abb.12:** Geometrischer Strahlengang in einem plan-parallel Resonator

Die zweite Teilstrecke ist ebenfalls leicht zu finden mit:

$$t_2 = t_1 \cdot \cos[2 \cdot \theta]$$

(Wir müssen hier der Weglängenunterschied senkrecht zur Ausbreitungsrichtung berücksichtigen!) Insgesamt haben wir also für die gesamte Weglängendifferenz:

$$D = t_1 + t_2 = d \cdot \{1 / \cos[\theta] + \cos[2 \cdot \theta] / \cos[\theta]\}$$

$$= 2 \cdot d \cdot \cos[\theta]$$

Gleiche Weglängendifferenzen finden wir also unter der Bedingung, daß der Einfallswinkel auf die Anordnung konstant ist. Das gilt also für alle Strahlen, die bei einer Abbildung ins Unendliche auf einen Kreis liegen.

Betrachten wir den Fall mit  $\theta = 0$ . Dafür muß die Resonanzbedingung gelten:

$$p \cdot \lambda_p = c/v_p = D = 2 \cdot d \cdot \cos[\theta=0] = 2 \cdot d, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Für beliebige Winkel erhalten wir also unter Beibehaltung der Ordnung "p" der Interferenz:

$$\lambda/\lambda_p = \cos[\theta] \quad \text{oder} \quad v/v_p = 1/\cos[\theta]$$

Mit zunehmendem Winkel verringert (!) sich also die Wellenlänge bzw. vergrößert sich die Resonanzfrequenz. Wir haben hier ein kontinuierliches Spektrum der Resonanzen im Unterschied zu den vorher behandelten Fällen.

Betrachten wir eine Abbildung im Abstand der Brennweite f einer hinter dem FP eingesetzten Linse, dann gilt für den Abstand u des Bildes von der Achse:

$$u/f = \tan[\theta]$$

Andererseits haben wir:

$$\cos[\theta] = 1/\sqrt{1+\tan^2[\theta]}$$

Insgesamt erhalten wir so:

$$(v/v_p)^2 - (u/f)^2 = 1 \quad [28]$$

Dies gilt für jede Ebene, in der der Strahlengang und die Achse des Etalons liegen. Wir erhalten also eine Serie von konzentrischen Kreise mit dem Radius  $u = f \cdot \sqrt{(v/v_p)^2 - 1}$ , wenn wir mit einem divergenten Strahlenbündel ausleuchten. Die Radien der Kreise hängen hyperbolisch mit der Resonanzfrequenz zusammen. Wir haben eine große Mannigfaltigkeit dieser Gleichungen mit  $p = 1, 2, 3, \dots$ . Dadurch überlappen sich bei jedem Winkel die Signale vieler Resonanzen unterschiedlicher Frequenzen, so daß man nur dann ein eindeutiges Verhalten des Resonators erhält, wenn die einfallende Strahlung ein Spektrum enthält, dessen Frequenzbreite nicht größer als

$$\Delta\nu \leq c \cdot FSR \quad \text{mit} \quad FSR = 1/(2 \cdot d)$$

FSR nennt man den "Freien Spektralbereich" (**F**ree **S**pectral **R**ange). Ähnliche Argumente gelten auch für den oben behandelten allgemeinen Fall. Es ist offensichtlich, daß auch dort eine entsprechende Abbildung ins Kalkül mit einbezogen werden muß. Näheres zu Abbildungen von Resonatorstrahlengängen findet sich im übernächsten Kapitel "Abbildung von Strahlenbündeln".

## Einhüllende des Strahlenbündels

Wir hatten ursprünglich für unsere Resonator-Transformationsmatrix gefunden (siehe Gl.[20]):

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} \cos[\psi] - (z - z_0)/z_R \cdot \sin[\psi] & \sin[\psi] \cdot z_R \cdot \{1 + (z - z_0)^2/z_R^2\} \\ -\sin[\psi]/z_R & \cos[\psi] + (z - z_0)/z_R \cdot \sin[\psi] \end{bmatrix}$$

und für  $z = z_0$  haben wir:

$$\mathbf{T}(z_0) = \begin{bmatrix} \cos[\psi] & \sin[\psi] \cdot z_R \\ -\sin[\psi]/z_R & \cos[\psi] \end{bmatrix}$$

Von dieser einfacheren Matrix ausgehend können wir die Transformationsmatrix an jeder Stelle in und außerhalb des Resonators berechnen, indem wir die Matrix auf der z-Achse verschieben. Die Stelle  $z_0$  hat eine besondere Bedeutung, der wir später nochmals begegnen werden.

Die Matrix  $\mathbf{T}_n(z_0) = \mathbf{T}(z_0)^n$  hatten wir bereits gefunden (siehe Gl.[19]):

$$\mathbf{T}(z_0)^n = \begin{bmatrix} \cos[n \cdot \psi] & \sin[n \cdot \psi] \cdot z_R \\ -\sin[n \cdot \psi]/z_R & \cos[n \cdot \psi] \end{bmatrix}$$

Für den zweidimensionalen Vektor  $\underline{x}$  (an der Stelle  $z_0$ ) erhalten wir nun bei jedem Umlauf die neuen Werte. Wir beginnen mit dem Vektor  $\underline{x}_0$ :

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ m_{x_0} \end{bmatrix}$$

Wir haben:

$$\begin{aligned} \underline{x}_n &= \mathbf{T}_n(z_0) \cdot \underline{x}_0 = \\ &= \begin{bmatrix} x_0 \cdot \cos[n \cdot \psi] + m_{x_0} \cdot \sin[n \cdot \psi] \cdot z_R \\ m_{x_0} \cdot \cos[n \cdot \psi] - x_0 \cdot \sin[n \cdot \psi]/z_R \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Durch Umformen erhalten wir:

$$\underline{x}_n = \begin{bmatrix} u_{x_0} \cdot \sin[n \cdot \psi + \alpha_{x_0}] \\ u_{x_0}/z_R \cdot \cos[n \cdot \psi + \alpha_{x_0}] \end{bmatrix}$$

mit  $u_{x_0} = [x_0^2 + (m_{x_0} \cdot z_R)^2]^{1/2}$  und

$$\operatorname{tg}[\alpha_{x_0}] = x_0/(m_{x_0} \cdot z_R).$$

Der Strahl bewegt sich im Zickzackkurs zwischen den beiden Spiegeln hin und her mit dem Erscheinungsbild von Mikado-Stäbchen, die man an einer Stelle gebündelt in der Hand hält (siehe Abb.13). Erstaunlicherweise lassen sich die Durchstoßpunkte der einzelnen Strahlen durch eine Ebene senkrecht zur Resonatorachse durch eine einfache trigonometrische Funktion beschreiben. Natürlich hat man es normalerweise mit zwei Richtungen senkrecht zur Achse zu tun. Für die y-Richtung gelten jedoch die gleichen Überlegungen. Dort hat man andere Anfangsbedingungen  $y_0$  und  $m_{y_0}$ , die dann ihrerseits die Amplituden  $u_{y_0}$  und  $v_{y_0}$  definieren. Zusammen genommen erwartet man also Ellipsenbahnen, auf denen sich die Durchstoßpunkte bewegen. Ein Sonderfall ist eine Bewegung auf einem Kreis, die durch die "richtige" Wahl der Anfangsbedingungen erzwungen werden kann.

Die maximale Auslenkung des Strahls ist durch  $u_{x_0}$  gegeben. Sie hängt naturgemäß von den Anfangsbedingungen  $x_0$  und  $m_{x_0}$  ab. Ebenso sind die maximal auftretende Steigung  $v_{x_0}$  und die "Phase"  $\alpha_{x_0}$  durch die Anfangsbedingungen definiert. Wohlge-merkt, es handelt sich hier um die Anfangsbedingungen an der Stelle  $z = z_0$ . Wir können nun auf einfache Weise auch den Vektor  $\underline{x}_n(z)$  an jeder beliebigen Stelle  $z$  durch Ausführung einer einfachen Translations-Transformation berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{x}_n(z) &= \begin{bmatrix} 1 & z-z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_n = \\ &= \begin{bmatrix} u_{x_0} \cdot \sin[n \cdot \psi + \alpha_{x_0}] + u_{x_0} \cdot (z-z_0)/z_R \cdot \cos[n \cdot \psi + \alpha_{x_0}] \\ u_{x_0}/z_R \cdot \cos[n \cdot \psi + \alpha_{x_0}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Damit bekommen wir:

$$\underline{x}_n(z) = \begin{bmatrix} u_x(z) \cdot \sin[n \cdot \psi + \alpha_{x_0} + \beta(z)] \\ u_{x_0}/z_R \cdot \cos[n \cdot \psi + \alpha_{x_0}] \end{bmatrix} \quad [26]$$

mit  $u_x(z) = u_{x_0} \cdot [1 + (z-z_0)^2/z_R^2]^{1/2}$  und  $\operatorname{tg}(\beta(z)) = (z-z_0)/z_R$

Die Größe  $z_R$  - die "Rayleigh-Länge" - haben wir schon früher im Vorgriff auf die später folgenden Überlegungen zur Beugungstheorie mit Gauß'schen Strahlen eingeführt. Sie charakterisiert den Laserstrahl, der ja durch die Resonatoreigenschaften, also durch die effektive Brennweite  $f$  und den Winkel  $\psi$  definiert wird.

Verwendet man die Anfangsbedingungen  $x_0(z_A)$  und  $m_0(z_A)$  an irgendeiner Stelle  $z_A$ , dann genügt es, auf die Werte von  $x_0=x_0(0)$  und  $m_{x0}=m_0(0)$  zurückzurechnen mit:

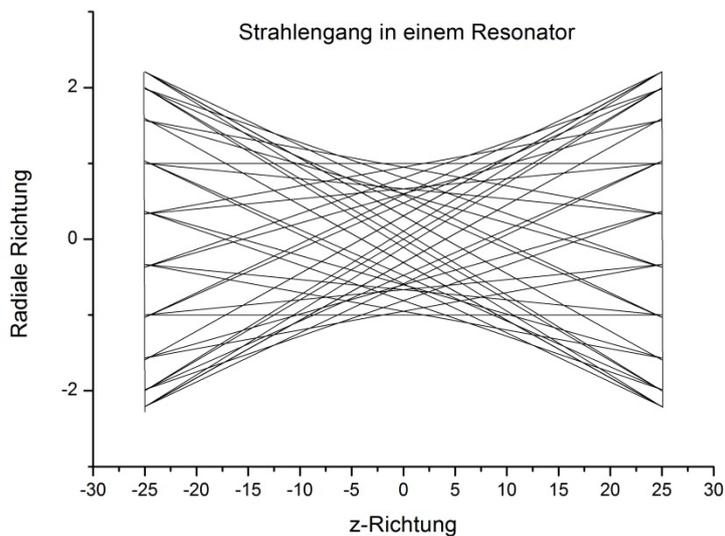
$$x_0 = x_0(z_A) - (z_A - z_0) \cdot m_0(z_A), \quad m_{x0} = m_0(z_A)$$

und oben einzusetzen. Die Werte von  $x_0(z_A)$  und  $m_{x0}(z_A)$  sind jetzt die an der Stelle  $z=z_A$  bestimmten Anfangsbedingungen, während zuvor die an der Stelle  $z=z_0$  bestimmten Anfangsbedingungen verwendet worden sind.

Die Maximalauslenkung  $u_x(z)$  - die "Waist" - verhält sich wie eine Hyperbel, da gilt:

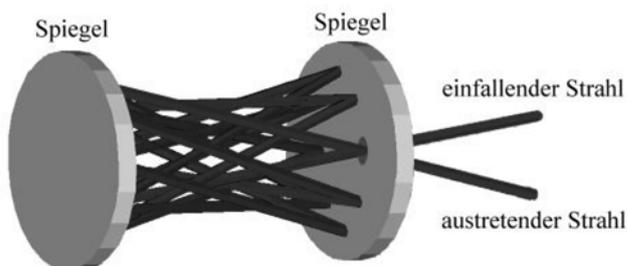
$$\frac{u_x(z)^2}{u_{x0}^2} - \frac{(z-z_0)^2}{z_R^2} = 1 \quad [27]$$

$u_{x0}$  ist der engste Durchmesser des Strahlenbündels, der an der Stelle  $z = z_0$  zu finden ist. Wir nennen diesen Durchmesser die "Strahl-Taille". Dieses Verhalten ist das, was man bei einer exakteren Beugungstheorie ebenfalls findet (siehe unten). Der Strahldurchmesser verhält sich hyperbolisch bei der Ausbreitung in  $z$ -Richtung. Ähnliches gilt natürlich auch für das Verhalten in  $y$ -Richtung.



**Abb.13:**  
Geometrischer Strahlengang in einem Resonator als Bündel von Mikado-Stäbchen.

Eine optische Anordnung, die von einem "Mikado-Stäbchen-Strahlengang" Gebrauch macht ist die sogenannte "Herriott-Zelle". Es handelt sich dabei um eine Methode, den Lichtweg durch eine Absorptionszelle durch Mehrfachreflexion zwischen zwei Spiegeln zu verlängern (siehe Abb.14). Hierzu wird ein Laserstrahl durch ein Loch in einem der beiden Spiegel eingekoppelt. Der Strahl wird mehrfach zwischen den Spiegeln hin und her reflektiert und trifft schließlich nach einer durch den Spiegelabstand und die Krümmungsradien der Spiegel vordefinierten Umlaufzahl wieder exakt auf das Loch, durch das eingekoppelt wurde. Am austretenden Strahl kann man dann mit einem Detektor die Absorptionen durch das Gas in der Zelle nachweisen, da die Richtung des Strahls mit der Richtung, aus der eingekoppelt wurde, nicht übereinstimmt.



**Abb.14:** Strahlengang in einer Herriott-Zelle

Im vorigen Kapitel hatten wir die Resonanzfrequenz über die Bedingung abgeschätzt, daß die Wellenlänge als ganzzahliges Vielfaches in ein Vielfaches der Resonatorlänge  $d$  hineinpassen sollte. Dabei hatten wir vernachlässigt, daß die optische Weglänge bei der Reflexion an den sphärischen Spiegeln auch von der Re-

flexionsstelle und von der Steigung der Strahlen abhängen könnte, da die Mikadostäbchen ja schräg zwischen den Spiegeln laufen. Wir müssen deshalb untersuchen, wie sich die optische Weglänge verhält auf dem Zickzackkurs des Strahlengangs. Zunächst einmal betrachten wir immer noch die Auftreffpunkte auf der Ebene der Spiegel als vorgegeben, was zwar nicht die Krümmung der Spiegel berücksichtigt, aber dennoch dem Ersatzbild vieler hintereinander geschalteter Linsen entspricht. Wir stellen uns vor, daß wir einen zweidimensionalen Strahlengang mit Auslenkung in x- und y-Richtung auf einem Kreis betrachten, was bei sphärischen Spiegeln auch immer leicht so einstellbar ist. Wir haben dann für den Abstand der Auftreffpunkte auf beiden Spiegeln an den Stellen  $z = s_1$  und  $z = d - s_2$ . (Wegen der Krümmung der Spiegel müssen wir die Änderung der z-Werte an den Spiegeloberflächen jeweils extra berücksichtigen.)

$$D^2 = (d - s_1 - s_2)^2 + [x_n(s_1) - x_n(d - s_2)]^2 + [y_n(s_1) - y_n(d - s_2)]^2$$

Da wir von Kreisbahnen auf den Spiegeln ausgehen, haben wir gleichzeitig, daß gilt:

$$u_{y0} = u_{x0} = u_0, \quad u_y(z) = u_x(z) = u(z) \quad \text{und} \quad \alpha_{y0} - \pi/2 = \alpha_{x0} = \alpha_0.$$

Für eine Kreisbahn muß außerdem gelten, daß

$$\text{wenn } u_x(z) = u(z) \cdot \sin[n \cdot \psi + \alpha_0 + \beta(z)]$$

$$\text{dann } u_y(z) = u(z) \cdot \cos[n \cdot \psi + \alpha_0 + \beta(z)]$$

Die Anfangsbedingungen für x und y müssen dementsprechend gewählt sein, so daß diese Phasenverschiebung um  $\pi/2$  auch tatsächlich garantiert ist. Da wir  $\beta(z)$  kennen, können wir demzufolge schreiben:

$$x_n(s_1) = u_0 \cdot \{ \sin[n \cdot \psi + \alpha_0] + (s_1 - z_0)/z_R \cdot \cos[n \cdot \psi + \alpha_0] \}$$

$$x_n(d - s_2) = u_0 \cdot \{ \sin[n \cdot \psi + \alpha_0] + (d - s_2 - z_0)/z_R \cdot \cos[n \cdot \psi + \alpha_0] \}$$

$$y_n(s_1) = u_0 \cdot \{ \cos[n \cdot \psi + \alpha_0] - (s_1 - z_0)/z_R \cdot \sin[n \cdot \psi + \alpha_0] \}$$

$$y_n(d - s_2) = u_0 \cdot \{ \cos[n \cdot \psi + \alpha_0] - (d - s_2 - z_0)/z_R \cdot \sin[n \cdot \psi + \alpha_0] \}$$

Wenn man einsetzt, gilt also insgesamt für die Weglänge D zwischen zwei Reflexionspunkten an den beiden Spiegeln:

$$D^2 = (d - s_1 - s_2)^2 \cdot \{ 1 + (u_0/z_R)^2 \}$$

Besonders wichtig ist, daß die Weglängendifferenz nicht von der Umlaufzahl n abhängig ist. Das gilt allerdings nur für eine kreisförmige Bahn. Bei einer nicht-kreisförmigen Bahn muß man die Summe aller Q Umläufe bilden, bis sich der Bahnverlauf selbst reproduziert (siehe oben). Man findet dann einen Ausdruck:

$$\langle D^2 \rangle = (d - s_1 - s_2)^2 \cdot \{ 1 + \frac{1}{2} \cdot (u_{x0}^2 + u_{y0}^2)/z_R^2 \},$$

der die Weglängendifferenz pro einfachem Umlauf im Mittel beschreibt. Andere Beiträge mitteln sich bei der Summe aller Umläufe dann zu Null.

Wir müssen allerdings noch die Kugeloberfläche der Spiegel berücksichtigen. Zur Beschreibung der beiden Spiegeloberflächen haben wir die Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + (z - r_1)^2 = r_1^2$$

$$\text{und } x^2 + y^2 + (z - (d - r_2))^2 = r_2^2$$

Der erste Spiegel hat seinen Mittelpunkt bei  $(x, y, z) = (0, 0, r_1)$  und berührt die x, y-Achsen bei  $z = 0$ . Der zweite hat seinen Mittelpunkt bei  $(x, y, z) = (0, 0, d - r_2)$  und schneidet die z-Achse bei  $z = d$ . Setzen wir die Positionen  $z = s_1$  und  $z = d - s_2$  ein, dann werden  $x = x(s_1)$ ,  $y = y(s_1)$  bzw.  $x = x(d - s_2)$ ,  $y = y(d - s_2)$ , und wir erhalten:

$$x_n^2(s_1) + y_n^2(s_1) + (s_1 - r_1)^2 = r_1^2$$

$$\text{und } x_n^2(d - s_2) + y_n^2(d - s_2) + (d - s_2 - (d - r_2))^2 = r_2^2$$

Daraus finden wir in zweiter Näherung, wenn wir  $x_n$  und  $y_n$  von oben einsetzen:

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot (z_R^2 + z_0^2)/r_1 \cdot u_0^2/z_R^2$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot (z_R^2 + (d - z_0)^2)/r_2 \cdot u_0^2/z_R^2$$

(Diese Näherung ist nur dann sinnvoll, wenn  $z_R$  groß ist, was für Resonatoren in der Nähe der konzentrischen Anordnung nicht mehr zutrifft.) Das ergibt, wenn wir die Ausdrücke für  $z_0$ ,  $z_R$ ,  $r_1$  und  $r_2$  verwenden:

$$s_1 + s_2 = \frac{1}{2} \cdot u_0^2/d \cdot (g_1+g_2-2 \cdot g_1 \cdot g_2)^2/[g_1 \cdot g_2 \cdot (1-g_1 \cdot g_2)] = d/2 \cdot u_0^2/z_R^2$$

Zusammen haben wir also dann:

$$\begin{aligned} D^2 &= d^2 \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot u_0^2/z_R^2 \pm \dots)^2 \cdot (1 + u_0^2/z_R^2) = \\ &= d^2 \cdot (1 - u_0^2/z_R^2 + \frac{1}{4} \cdot u_0^4/z_R^4 \pm \dots) \cdot (1 + u_0^2/z_R^2) = \\ &= d^2 \cdot (1 - \frac{3}{4} \cdot u_0^4/z_R^4 \pm \dots) = d^2 \cdot (1 - \mathcal{O}(u_0^4/z_R^4)) \approx d^2 \end{aligned}$$

$\mathcal{O}(u_0^4/z_R^4)$  müssen wir im Rahmen der hier verwendeten Näherung vernachlässigen, was bedeutet, daß die mittlere optische Weglänge zwischen zwei Reflexionen unabhängig von der Waist  $u_0$  ist. Damit ist auch im nachhinein die Annahme in Gl.[22] für die konstante optische Weglänge  $2 \cdot d$  bei einem vollständigen Umlauf im Resonator gerechtfertigt. Die Abweichung höherer Ordnung sollte man den sphärischen Spiegeln zuordnen, die bekanntermaßen Abbildungsfehlern aufweisen.

## Einfluß der Beugung

Bisher haben wir das Phänomen der Beugung nicht berücksichtigt. Das ist allerdings auch schwierig, wenn man gleichzeitig von Strahlen spricht, da so etwas wie ein Strahl in der Elektrodynamik gar nicht existiert. Aber wir können versuchen, eine Abschätzung zu erstellen. Was uns fehlt, ist eine Aussage über die Strahl-Taille, der engsten Waist, wie sie bei unserem  $u_{x0}$  von vorher lediglich durch die Anfangsbedingungen definiert wird. Wir wissen, daß diese Anfangsbedingungen in einem Laser-Resonator keine Rolle spielen können. Wir stellen uns vor, daß wir einen "richtigen" Strahl herstellen durch Superponierung von vielen solcher Zickzack-Strahlen mit jeweils verschiedenen Anfangsbedingungen. Dadurch können wir eine konstante Belegung durch "Mikado-Stäbchen" über die ganze Spiegelfläche erzeugen. Zusätzlich stellen wir eine Blende an die Stelle  $z_0$ , wo wir den geringsten Strahldurchmesser gefunden haben. Die Blende habe den Durchmesser  $D$  und bestimmt damit unser maximales  $u_{x0} = D/2$ . Wir wissen, daß die Beugung an einer kreisförmigen Blende Beugungsminima bei der Steigung

$$m_B = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} = 0,61 \cdot \frac{2\pi}{k \cdot u_{x0}}, \quad (k = 2 \cdot \pi/\lambda)$$

erzeugt. Das ergibt sich aus der ersten Nullstelle des Airy-Scheibchens. Wir verlangen nun, daß die Beugungsminima nicht innerhalb unseres ursprünglichen Strahlenbündels auftreten dürfen, da wir dann Knotenlinien innerhalb unserer Amplitudenverteilung erhalten würden. Um dies auszuschließen, muß also gelten:

$$m_B \geq m_{Max} = v_{x0} = \frac{u_{x0}}{z_R}$$

Da  $D = 2 \cdot u_{x0}$  haben wir schließlich:

$$v_{x0} = \frac{u_{x0}}{z_R} \approx 1,22 \cdot \frac{\pi}{k \cdot u_{x0}} \quad [29]$$

Hier haben wir angenommen, daß das erste Beugungsminimum nicht zu weit außerhalb unseres ursprünglichen Strahls liegen soll, damit wir nicht zu viel von der ursprünglichen Intensitätsverteilung verlieren. Deshalb wurde das Gleichheitszeichen durch das Ungefähr-Zeichen ersetzt. Wir erhalten so:

$$u_{x0} \approx \sqrt{\{1,22 \cdot z_R \cdot \pi/k\}},$$

oder, wenn wir  $z_R$  unter Verwendung von  $f$  aus Gl.[10] und  $\psi$  aus Gl.[21] einsetzen:

$$\begin{aligned} u_{x0}^4 &= (1,22 \cdot \pi \cdot d/k)^2 \cdot \frac{g_1 \cdot g_2 \cdot (1-g_1 \cdot g_2)}{(g_1+g_2-2 \cdot g_1 \cdot g_2)^2} = \\ &= (1,92 \cdot \lambda/\pi)^2 \cdot \frac{d \cdot (r_1-d) \cdot (r_2-d) \cdot (r_1+r_2-d)}{(r_1+r_2-2 \cdot d)^2} \quad [30] \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Beziehung zwischen den geometrischen Parametern des Resonators ( $r_1$ ,  $r_2$  und  $d$ ) und dem Strahlradius  $u_{x0}$  gefunden, die nicht mehr von den Anfangsbedingungen abhängt. Gegenüber einer exakteren Beugungstheorie haben wir erstaunlicherweise mit unserer Abschätzung die Strahlwaist um lediglich 39% überschätzt (siehe dazu weiter unten). Dies Ergebnis sollte also ziemlich genau die Verhältnisse beschreiben, wenn sich das Feld seine Verteilung selbst aussuchen kann, wie es beim Laser üblicherweise der Fall ist. Man findet aus obigen Beziehungen auch noch einen wichtigen Zusammenhang zwischen Strahlradius  $u_{x0}$  und der maximalen Steigung  $v_{x0}$ :

$$u_{x0} \cdot v_{x0} = 1,22 \cdot \pi / k = 1,92 \cdot \lambda / \pi \quad [31]$$

Dies ist die Beugungsbeziehung zwischen der Taille eines Laserstrahls (minimaler Strahlradius) und seines Divergenzwinkels.

Die obigen Gleichungen [30] und [31] stimmen erstaunlicherweise beinahe perfekt mit den Gleichungen überein, die man durch eine exaktere Beugungstheorie erhält (siehe weiter unten, Gl. [52] und [76]). Sie unterscheiden sich von den vorherigen nur dadurch, daß in den beiden Gleichungen der Faktor "1,92" durch eine "1" ersetzt werden muß. Wir haben uns also ein relativ genaues Bild der Vorgänge im Resonator verschafft, ohne eine wirklich angemessene Beugungstheorie zu verwenden.

Dadurch, daß schon so ein relativ präzises Bild des Strahlenverlaufs eines sogenannten "Gauß'schen Strahls" gewonnen werden kann, kann mit einem zwischen zwei Spiegeln hin und her reflektierten Laserstrahl ein beliebiger Gauß'scher Strahl rein geometrisch simuliert werden. Wird der Laserstrahl auf einer kreisförmigen Bahn auf jedem der beiden Spiegel reflektiert, dann stellt die Einhüllende der an den Auftreffpunkten des Lasers transmittierten Teilstrahlen einen Gauß'schen Strahl dar, dessen Taille und Divergenz fast beliebig eingestellt werden können. Dies kann besonders für Submm/THz-Optiken wertvoll sein, um Abbildungsverhältnisse auch bei diesen Wellenlängen, wo die Beugung ganz besonders dominiert, präzise untersuchen zu können.

## "Abbildung" von Strahlenbündeln

Wichtig ist, daß der Divergenzwinkel umgekehrt proportional zur Taille ist. Will man Laserstrahlen über weite Strecken senden, dann muß seine Divergenz klein sein. Das bedeutet aber, daß seine engste Stelle, die Strahl-Taille, groß sein muß. Dafür benötigt man ein Teleskop, das den Strahl genügend aufweitet. Das ist nichts besonders Neues, denn umgekehrt gilt ja auch wegen der Beugung, daß man ein großes Teleskop benötigt, um möglichst kleine Strukturen (Strahlen mit kleinsten Unterschieden im Einfallswinkel) noch erkennen zu können. Dies ist zum Beispiel eines der Hauptargumente, warum es praktisch unmöglich ist, einen Laser über große Entfernungen als zerstörerische Waffe einzusetzen, wie es einmal im Rahmen des amerikanischen SDI-Programms (Strategic Defense Initiative) in Diskussion war. Stellen wir uns einmal vor, wir wollten über eine Entfernung von 1000 km einen Brennfleck eines Laserstrahls von 10 cm Radius erzeugen. Damit dabei Metall auch wirklich angegriffen wird, braucht man schon einen Höchstleistungslaser. Zum Beispiel, bei einer Spitzenleistung des Lasers von 1 Megawatt wäre die Leistungsdichte auf der Fläche etwa 3 kWatt/cm<sup>2</sup>. (Unter Verwendung von Gl.[48] findet man für ein Gauß-förmiges Strahlprofil etwa das Doppelte im Maximum.) Dies ist weit weniger als 1% der beim industriellen Laserschneiden von Metall benötigten Energiedichte und ist somit nicht gerade beeindruckend viel, wenn man außerdem bedenkt, daß der größte Teil davon von metallischen Oberflächen ohnehin wieder reflektiert wird.

Betrachten wir den 10 cm Fleck als Taille des Laserstrahls, dann ist seine Divergenz gegeben durch:

$$v_{x0} = \lambda / (\pi \cdot u_{x0}) \approx 3,2 \cdot 10^{-5}$$

(Wir haben hier die exaktere Beziehung für den Zusammenhang von  $u_{x0}$  und  $v_{x0}$  - siehe Gl.[31] - verwendet, wie er später noch hergeleitet wird.) Als Wellenlänge wurde 10  $\mu$  (CO<sub>2</sub>-Laser) eingesetzt. Der Divergenzwinkel des Strahls ist somit etwa 6,6". In 1000 km Entfernung vom Ziel weitet sich der Strahlradius auf etwa

32 m auf! Dieser Strahl muß aber (unter der Vorstellung der Umkehr des Strahlengangs) von der Sendeoptik verarbeitet werden können. Eine Optik, die die erforderliche Oberflächengenauigkeit (besser als  $\lambda/10$ ) bei einem Durchmesser von mindestens 64 m besitzt, existiert nicht und wird wohl auch kaum zu vernünftigen Kosten herstellbar sein. Selbst mit einem Laser im sichtbaren Spektralbereich ( $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ ) wird ein Teleskop mit einer Öffnung von mindestens 3,2 Metern verlangt, damit diese Bündelung in großer Entfernung überhaupt möglich ist. Das ist angesichts der notwendigen Oberflächengenauigkeit immer noch ein äußerst aufwendiges, allerdings nicht unmögliches Unterfangen. Jedoch müssen bei der Verfolgung der Idee einer Fernwaffe auch noch die atmosphärischen Einflüsse, die eine stabile Strahlführung mit hoher Präzision gar nicht zuläßt, und die Probleme der schnellen Steuerung des Teleskops mit der notwendigen Genauigkeit berücksichtigt werden. Das sind technologische Hürden, die zunächst einmal nicht so ohne weiteres überwunden werden können. (Inwieweit man hier Methoden der „adaptiven Optik“ einsetzen kann, die zwar genaues Fokussieren, aber nur ungenaues Zielen ermöglicht, sei dahingestellt.)

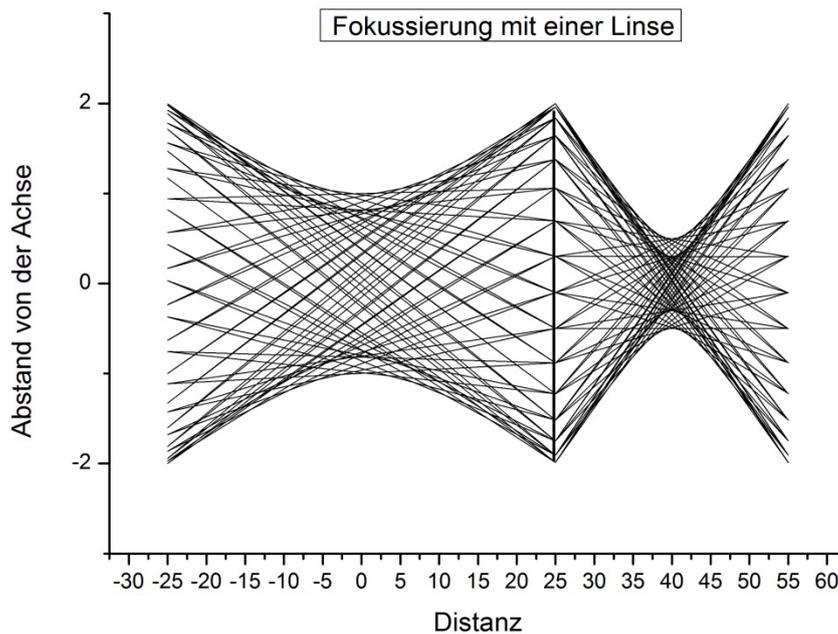


Abb.15: Fokussierung durch eine Linse

Ein anderes Beispiel ist die Materialbearbeitung mit Hilfe von Lasern. Dazu braucht man eine möglichst große Energiedichte. Im Unterschied zum Beispiel zuvor ist es aber nicht mehr notwendig, in großer Entfernung zu arbeiten. Man kann also den Laserstrahl mit einer Linse kurzer Brennweite sehr stark fokussieren. Betrachten wir deshalb einmal den Vorgang der Fokussierung durch eine abbildende Optik. Unser einfallender Laserstrahl wird durch  $\underline{u}_{x0}$  beschrieben, seine Divergenz ist dann ebenfalls durch die Parameter des Laser-Resonators ( $z_R$  und  $\psi$ ) gegeben. Wie in Abb.15 zu erkennen ist, wird der Laserstrahl in einem Resonator erzeugt, dessen Zentrum im Abstand  $a$  von unserer Optik liegt. Die Stelle engster Bündelung nach der Optik im Abstand  $b$  ist gleichzeitig die Stelle, wo wir die Taille  $\underline{u}_{x0}$  erhalten. Die Optik habe die Brennweite  $f$ , den Abstand des "gegenstandsseitigen Fokalfpunktes"  $a_f$  und entsprechend den "bildseitigen Fokalfunkt"  $b_f$ . Die Transformationsmatrix vom Zentrum des Laserresonators zum Bildpunkt ist gegeben durch:

$$\mathbf{T}_n(z_0+a+b) = \begin{bmatrix} -\delta b/f & f*[1-\delta a*\delta b/f^2] \\ -1/f & -\delta a/f \end{bmatrix}$$

mit  $\mathbf{T}_n(z_0) = \mathbf{T}(z_0)^n$

Multipliziert man die neue Matrix  $\mathbf{T}_n(z_0+a+b)$  aus und wendet man sie auf den Anfangsvektor  $\underline{x}_0$  an, dann erhält man aus dem alten Vektor

$$\underline{x}_n = \begin{bmatrix} u_{x0} \cdot \sin[\psi_n] \\ v_{x0} \cdot \cos[\psi_n] \end{bmatrix}, \quad v_{x0} = u_{x0}/z_R$$

den neuen, abgebildeten Vektor

$$\underline{x}_n' = \mathbf{T}_n(z_0+a+b) \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} u_x' \cdot \sin[\psi_n + \gamma] \\ v_x' \cdot \cos[\psi_n + \delta] \end{bmatrix} \quad [32]$$

mit  $u_x' = u_{x0} \cdot \sqrt{\{(\delta b/f)^2 + (f/z_R)^2 \cdot [1 - \delta a \cdot \delta b/f^2]^2\}},$

$$v_x' = v_{x0}' = -v_{x0} \cdot \sqrt{\{(z_R/f)^2 + (\delta a/f)^2\}},$$

$$\operatorname{tg}[\gamma] = \frac{\delta a \cdot \delta b - f^2}{\delta b \cdot z_R}, \quad \operatorname{tg}[\delta] = -\frac{z_R}{\delta a}.$$

Der Winkel  $\psi_n$  steht für die zuvor gefundenen Teilwinkel bei der Vielfach-Reflexion im Laserresonator:

$$\psi_n = n \cdot \psi - \alpha_{x0} \quad (\text{siehe Gl. [29]})$$

Im Augenblick interessieren wir uns lediglich für die Veränderung der Amplitude  $u_{x0}$ . Kennt man die Transformationsmatrix, dann kann man daraus die neue Amplitude  $u_{x0}'$  angeben.

Dazu ist zunächst die Lage der Strahl-Taille zu finden um deren Größe zu bestimmen. Wir müssen also das  $u_x'$  finden, für das gilt:

$$\frac{d u_x'(\delta b)}{d(\delta b)} = 0$$

Vom Ausdruck für  $u_x'$  erhalten wir dann:

$$\delta b - \delta a \cdot [1 - \delta a \cdot \delta b/f^2] \cdot f^2/z_R^2 = 0$$

$$\text{oder} \quad \delta b = \delta a \cdot \frac{f^2}{z_R^2 + \delta a^2} \quad [33]$$

Der Abstand der Bildtaille vom bildseitigen Brennpunkt der Optik steht also in einem vergleichsweise einfachen Zusammenhang mit dem Abstand der "Gegenstandstaille".

Entscheidend für die Abweichung vom Abbildungsgesetz der geometrischen Optik

$$\delta b = f^2/\delta a$$

ist die Rayleigh-Länge  $z_R$ . Bisher ist er aus den Anfangsbedingungen und den geometrischen Parametern unseres Resonators bestimmt, wir haben aber bereits gesehen und werden dies später noch genauer untersuchen, daß die Beugung entscheidend an dieser Größe mitwirkt.

Im Falle einer einfachen (dünnen) Linse haben wir wegen  $a_f = b_f = f$  für die Bildweite  $b$  als Funktion der Gegenstandsweite  $a$ :

$$b = \frac{a \cdot f}{a - f} \cdot \left[ 1 - \frac{f/a}{1 + (a-f)^2/z_R^2} \right]$$

Hier ist besonders deutlich, daß der "Bildpunkt"  $b$  nicht exakt dort liegt, wo man es nach der Linsengleichung erwarten würde ( $b = a \cdot f/[a-f]$ ). Der zweite Summand in der Klammer sorgt für eine Verringerung der Bildweite! Insbesondere bleibt  $b$  für alle Abstände  $a$  beschränkt, es gibt keine "Abbildung" ins Unendliche! Der maximale Abstand wird erreicht bei

$$\delta a_{\text{Max}} = z_R \quad \text{mit} \quad \delta b_{\text{Max}} = \frac{f^2}{2 \cdot z_R}$$

Interessanterweise ist es nicht möglich, mit einem vorgegebenen Laser-Resonator und einer Optik vorgegebener Brennweite ein "Bild" der Taille in jedem beliebigen Abstand zu erzeugen. Man muß für große Abbildungsweiten auf jeden Fall auch die Brennweite der Linse entsprechend groß wählen.

Ein anderer Extremfall im Vergleich zur geometrischen Optik findet sich bei  $\delta a = 0$ . Wir erwarten in der normalen Optik dann das Bild im Unendlichen, jedoch hier finden wir für den Abstand der Bildtaille ebenfalls die bildseitige Brennweite der Optik. Dies ist extrem verschieden von den Erwartungen der geometrischen Optik.

Setzen wir das gefundene  $\delta b$  in die Gleichung für das neue  $u_{x0}'$  ein, dann finden wir für die neue, minimale Waist:

$$u_{x0}'^2 = \frac{u_{x0}^2}{(\delta a/f)^2 + (z_R/f)^2} \quad [34]$$

An dieser Stelle gilt auch

$$\text{tg}[\gamma] = \text{tg}[\delta] = -\frac{z_R}{\delta a}$$

Der Übergang zur geometrischen Optik ist für den Fall eines großen Abstandes zwischen Gegenstandsweite und Brennweite  $\delta a$  auch hier nur annähernd möglich. Dann haben wir:

$$u_{x0}' = \frac{f}{\delta a} \cdot u_{x0}$$

Dies kann aber meistens nur als grobe Näherung betrachtet werden.

Wir hatten in Gl.[32] außerdem:

$$v_{x0}'^2 = v_{x0}^2 \cdot [(\delta a/f)^2 + (z_R/f)^2] \quad [35]$$

Daraus folgt für das Produkt von minimaler Waist und maximaler Steigung der Strahlen:

$$u_{x0}' \cdot v_{x0}' = u_{x0} \cdot v_{x0} \quad [36]$$

Wir hatten oben gesehen, daß in der Tat das Produkt von Taille und maximaler Steigung konstant und durch die Beugung bestimmt ist. Bleibt anzumerken, daß die Betrachtung hier für jede beliebige Optik gilt, solange die paraxiale Näherung Gültigkeit besitzt. Aus diesem Grunde ist auch die Formulierung mit den Abständen von den beiden Brennpunkten der Optik ( $\delta a$  und  $\delta b$ ) wesentlich universeller in der Anwendung, als eine Schreibweise, wie sie dem einfachen Linsengesetz entspricht.

Obwohl die hier abgeleiteten Ergebnisse sehr aufschlußreich sind, wollen wir nun jedoch die rein geometrische Optik verlassen und zur ergiebigeren Beugungsoptik übergehen.

## 2.) Gauß'sche Strahlenoptik

### Die Wellengleichung

Bisher haben wir nur rein geometrische Optik betrachtet, die Effekte der Beugung wurden nur am Rande berücksichtigt. Eine elektrodynamische Behandlung des Problems ist nur unter Schwierigkeiten mit der geometrischen Optik von "Mikadostäbchen" zu vereinbaren. Die Richtung der Ausbreitung von Licht wird mit einem  $k$ -Vektor hinreichend beschrieben, aber die Lokalisierung eines Strahls in einem genau definierten Abstand von der optischen Achse ist nicht mehr möglich. Elektrodynamische Lösungen der Wellengleichung in Kugelkoordinaten sind in allen entsprechenden Lehrbüchern zu finden, deshalb sollen sie hier nicht weiter behandelt werden. Eine Vorzugsrichtung in der Ausbreitung ist einfach in Zylinderkoordinaten vorstellbar. Deshalb wollen wir die (skalare) Wellengleichung zur Wellenfunktion  $F(x, y, z)$

$$(\nabla^2 + k^2) F(x, y, z) = 0 \quad [37]$$

in Zylinderkoordinaten behandeln mit

$$x = r \cdot \cos(\Phi), \quad y = r \cdot \sin(\Phi).$$

(Den Vektor-Charakter des elektromagnetischen Feldes wollen wir hier vernachlässigen.) Einsetzen ergibt:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right\} F(r, \Phi, z) = 0$$

Wir gehen davon aus, daß wir ein Feld betrachten, dessen Hauptausbreitungsrichtung die  $z$ -Richtung ist. Deshalb setzen wir an, daß der wesentliche Anteil der Funktion der einer ebenen Welle in  $z$ -Richtung ist:

$$F(r, \Phi, z) = f(r, \Phi, z) \cdot \text{Exp}\{i \cdot k \cdot z\}$$

Damit erhalten wir:

$$f_{rr} + \frac{1}{r} \cdot f_r + \frac{1}{r^2} \cdot f_{\Phi\Phi} + 2 \cdot i \cdot k \cdot f_z + f_{zz} = 0$$

(Die tiefgestellten Zeichen stehen für die entsprechenden Ableitungen der Funktion  $f$ ). Wir gehen davon aus, daß  $f$  nur langsam veränderlich mit der Variablen  $z$  ist, daß also die wesentliche Abhängigkeit von  $z$  durch den Anteil der ebenen Welle bereits beschrieben ist. In diesem Fall können wir die zweite Ableitung nach  $z$  vernachlässigen (siehe unten), und wir haben nun noch die Differentialgleichung

$$f_{rr} + \frac{1}{r} \cdot f_r + \frac{1}{r^2} \cdot f_{\Phi\Phi} + 2 \cdot i \cdot k \cdot f_z = 0$$

zu lösen.

Wie üblich kann die Abhängigkeit vom Winkel  $\Phi$  absepariert werden:

$$f(r, \Phi, z) = g(r, z) \cdot \text{Exp}\{i \cdot m \cdot \Phi\}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$g_{rr} + \frac{1}{r} \cdot g_r + 2 \cdot i \cdot k \cdot g_z - \frac{m^2}{r^2} \cdot g = 0 \quad [38]$$

### Eine einfache Lösung

Wir betrachten erst einmal den Fall der vollen Rotationssymmetrie, also den Fall  $m = 0$ . Wir haben dann:

$$g_{rr} + \frac{1}{r} \cdot g_r + 2 \cdot i \cdot k \cdot g_z = 0$$

Wir machen nun den weiteren Ansatz:

$$g(r, z) = \text{Exp}\left\{ i * \frac{k}{2} * \frac{r^2}{q(z)} + p(z) \right\} \quad [39]$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, dann erhalten wir:

$$2 * i * k * \left( p_z + \frac{1}{q} \right) + k^2 * (q_z - 1) * \frac{r^2}{q^2} = 0$$

$p_z$  und  $q_z$  sind die jeweiligen Ableitungen von  $p(z)$  bzw.  $q(z)$  nach  $z$ . Damit diese Gleichung für jedes  $r$  und für jedes  $z$  gleichzeitig erfüllt ist, müssen beide Klammern verschwinden. Damit haben wir:

$$q_z = 1 \quad \text{und} \quad p_z = -1/q$$

Die Integration der ersten Differentialgleichung liefert:

$$q(z) = q_0 + z$$

Damit aber der Ansatz für  $g(r, z)$  bei keinem Wert von  $z$  divergieren kann, darf  $q_0$  nicht rein reell sein. Wir setzen deshalb  $q_0$  rein imaginär, da ein zusätzlicher Realteil als einfache Verschiebung des Nullpunkts der  $z$ -Skala interpretiert werden kann:

$$q_0 = -i * z_R,$$

wobei die Rolle von  $z_R$  noch zu klären bleibt. Also gilt:

$$q(z) = z - i * z_R \quad [40]$$

$p(z)$  läßt sich nun auch integrieren:

$$p(z) = C - \ln(z - i * z_R) + \ln(-i * z_R)$$

Verwenden wir die Definition des komplexen Logarithmus

$$\ln(x) = \ln(|x| * e^{i * \psi}) = \ln(|x|) + i * \psi,$$

dann erhalten wir:

$$p(z) = C - \ln(\sqrt{[1 + (z/z_R)^2]}) - i * \psi \quad [41]$$

$$\text{mit } \text{tg}(\psi) = z/z_R$$

Verbleibt noch  $C$  als eine vorläufig unbestimmte Integrationskonstante.

Untersuchen wir zunächst die Eigenschaften des sogenannten "Gauß'schen Parameters"  $q(z)$ . Wir können umformen:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z - i * z_R} = \frac{1}{R(z)} + i * \frac{2/k}{w^2(z)} \quad [42]$$

$$\text{mit } w^2(z) = \frac{2 * z_R}{k} * [1 + (z/z_R)^2] \quad [43]$$

$$\text{und } R(z) = z * [1 + (z_R/z)^2] \quad [44]$$

$w(z)$  nennen wir die "Waist" des Strahls und  $R(z)$  den Krümmungsradius der Phasenfronten (siehe unten).

Wir können nun unseren Exponential-Ansatz umschreiben in:

$$g(r, z) = e^C * \frac{\sqrt{[2 * z_R/k]}}{w(z)} * \text{Exp}\left\{ i * \left[ k * \frac{r^2}{2 * R(z)} - \psi \right] - \frac{r^2}{w^2(z)} \right\}$$

Die noch offene Integrationskonstante  $C$  können wir mittels der Normierung der Wellenfunktion ersetzen. Setzen wir:

$$\iint |g(r, z)|^2 * r * dr * d\phi = 1,$$

dann erhalten wir:

$$|e^c|^2 = \frac{k}{\pi \cdot z_R}$$

Insgesamt haben wir also eine spezielle Lösung der Wellengleichung gefunden mit:

$$F(r, \Phi, z) = \frac{\sqrt{[2/\pi]}}{w(z)} * \text{Exp}\left\{ i * \left[ k * \left( z + \frac{r^2}{2 * R(z)} \right) - \psi \right] - \frac{r^2}{w^2(z)} \right\} \quad [45]$$

### Die Eigenschaften des Gauß'schen Strahls

Die Amplitude (also der Betrag von  $F(r, \Phi, z)$ ) nimmt als Funktion von  $r$  wie eine Gauß-Funktion ab, daher der Name "Gauß'sche Strahlen". Die Ausbreitungsrichtung ist identisch mit der  $z$ -Achse. Für  $r = w(z)$  erhalten wir 1/e-tel ( $\approx 36.8\%$ ) der maximalen Amplitude bei  $r = 0$ . (Nebenbei: Die Intensität ist dort bereits auf einen Pegel von  $1/e^2 \approx 13,5\%$  abgefallen.) Entlang der Achse ( $r = 0$ ) nimmt die Amplitude wie  $1/w(z)$  ab, also etwa proportional zu  $1/z$  für große  $z$ . Für  $z = 0$  erhalten wir den kleinsten Wert von  $w$ :

$$w_0 = w(z=0) = \sqrt{[2/k * z_R]} \quad [46]$$

Wir nennen  $w_0$  deshalb die "Strahl-Taille" oder auch "minimale Waist". Die Waist  $w(z)$ , also der 1/e-Radius des Strahls, entwickelt sich mit  $z$  wie:

$$\frac{w^2(z)}{w_0^2} - \frac{z^2}{z_R^2} = 1 \quad [47]$$

Sie verhält sich also wie eine Hyperbel. Wir erhalten somit erstaunlicherweise exakt das gleiche Verhalten der Waist, wie wir oben für die Einhüllende der "Mikado-Stäbchen" bei der geometrischen Optik gefunden haben, wobei die Größe  $z_R$  hier ihren Sinn als Integrationskonstante unserer Differentialgleichung bzw. als indirekte Festlegung der Größe der Strahltaile erhält (siehe Gl.[27]).

Für die Intensität eines Laserstrahls als Funktion des Radius  $r$  und des Azimutwinkels  $\Phi$  müssen wir das Betragsquadrat der hier gefundenen Amplitude berechnen. Wir haben dann:

$$I(r, \Phi) = \frac{P}{\pi/2 * w^2(z)} * \text{Exp}\left\{ -2 * \frac{r^2}{w^2(z)} \right\}$$

$P$  ist die gesamte im Strahl enthaltene Leistung, wie man leicht durch Integration über die Fläche senkrecht zum Strahl beweist. (Dies ist natürlich das Resultat der oben eingeführten Normierung.)  $\pi/2 * w^2$  ist somit die effektive Fläche, auf die sich die Leistung  $P$  verteilt. Die maximale Intensität findet man an der Stelle der Strahl-Taille und dort in Strahlmitte, und sie ist:

$$I_{Max} = \frac{P}{\pi/2 * w_0^2} \quad [48]$$

Abgesehen von der Amplitudenentwicklung haben wir noch die Phase des Strahls zu diskutieren. Neben dem Beitrag der ebenen Welle " $k * z$ " ist noch der Ausdruck  $r^2/(2 * R(z))$  von Bedeutung. Er besagt, daß mit zunehmendem Abstand  $r$  von der Achse die optische Weglänge um diesen Betrag gegenüber dem Ansatz einer ebenen Welle zunimmt. Gehen wir einmal davon aus, daß die Phasenfronten des Feldes sich tatsächlich als Kugelwellen ausbreiten, deren Krümmungsradius gleich  $R$  ist. In Abb.16 sind die Verhältnisse dargestellt. Links vom Ursprung ( $z = 0$ ) liegt der Mittelpunkt der kugelförmigen Wellenfront, die wir an der Stelle  $z$  betrachten wollen. Der Abstand vom Krümmungsmittelpunkt ist gleich  $R$  für  $r = 0$ . Ist  $r \neq 0$ , dann ist die optische Weglänge vom Krümmungsmittelpunkt  $O$  bis zum Punkt  $A$  in der Abbildung gegeben durch:

$$s = \sqrt{[R(z)^2 + r^2]}$$

Also muß das Licht vom Mittelpunkt bis zum Punkt A einen zusätzlichen Weg  $\delta$  zurücklegen mit

$$\delta = s - R(z),$$

da  $R$  der Weg der ebenen Welle bis zum Ort  $z$  an der Stelle  $r=0$  wäre. Ist  $r \ll R$ , dann können wir die Wurzel entwickeln und haben:

$$\delta = \frac{r^2}{2 \cdot R(z)}$$

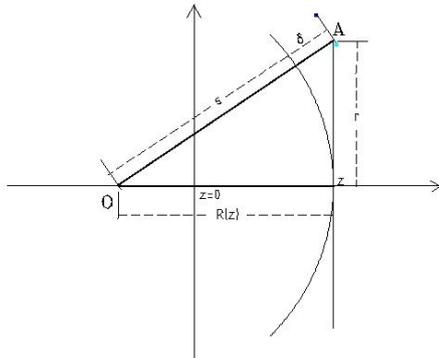


Abb.16: Weglänge für eine Kugelwelle

Insgesamt haben wir also an der Stelle  $z$  im Abstand  $r$  von der  $z$ -Achse den optischen Weg

$$l = z + \frac{r^2}{2 \cdot R} \quad [49]$$

anzusetzen. Dies ist genau der Inhalt der runden Klammer im Argument unserer Lösung der Wellengleichung. Allerdings ist der Krümmungsradius  $R$  nicht konstant, sondern eine Funktion von  $z$ . Die Lage des Krümmungsmittelpunktes ist außerdem ebenfalls von  $z$  abhängig, was unseren Gauß'schen Strahl von einer "gerichteten Kugelwelle" deutlich unterscheidet.

Allerdings kommt noch ein weiterer Beitrag zur optischen Weglänge hinzu, der durch den Winkel  $\psi$  beschrieben wird.

$$s' = -\psi/k = -1/k \cdot \arctg[z/z_R] \quad [50]$$

Dieser Beitrag ist sehr klein, macht er maximal doch nur eine viertel Wellenlänge aus ( $\psi \rightarrow \pi/2$  bei  $z \rightarrow \infty$ ), er spielt aber bei der Berechnung von Resonator-Eigenfrequenzen eine gewisse Rolle (siehe unten).

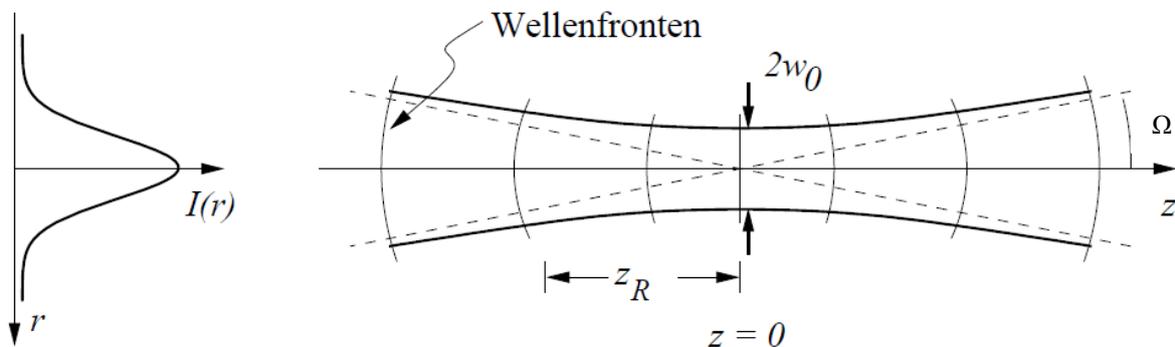


Abb.17: Phasenfronten und Kurven der 1/e-Amplitude

Der Krümmungsradius  $R(z)$  ist gleich unendlich für  $z = 0$ , die Phasenfronten sind also die von ebenen Wellen an der Stelle der Strahl-Taille. In Abb.17 sind die Verhältnisse anschaulich dargestellt. In vertikaler Richtung sind die Phasenfronten als dünne Linien angedeutet, während durch eine dicke Linie der Verlauf

der  $1/e$ -Amplitude angedeutet ist. Dies sind nicht die Kurven gleicher Amplitude (Isophoten) sondern die Kurven gleicher relativer Amplitude. Für die Position des Krümmungsmittelpunktes haben wir:

$$z_M = z - R(z) = -z_R^2/z$$

Erst wenn  $z$  sehr groß gegen  $z_R$  wird, haben wir es mit Kugelfronten zu tun, deren Mittelpunkt mit dem Ursprung praktisch zusammenfällt.

In fast allen Formeln kommt der Ausdruck

$$z_R = -\text{Im}\{q(z)\} = k/2 \cdot w_0^2 \quad \text{vor,} \quad [51]$$

den wir schon als "Rayleigh-Länge" kennengelernt haben. Dies ist der Wert von  $z$ , bei dem sich die Waist  $w(z)$  um den Wert  $\sqrt{2}$  vergrößert, bzw. wo der Krümmungsradius der Wellenfronten genau doppelt so groß ist wie der Abstand von der Position der Strahl-Taille. Man kann  $z_R$  als die Länge bezeichnen, bei dem der Übergang von einer annähernd ebenen Welle in eine Kugelwelle mit dem Zentrum im Ursprung stattfindet. Je kleiner die Taille  $w_0$  ist bzw. je größer die Wellenlänge ist, desto kleiner wird  $z_R$ , desto schneller kommen wir also beim Fortschreiten auf der  $z$ -Achse in das Gebiet, in dem der Kugelwellencharakter dominiert. Dieser Übergang findet dort statt, wo der Krümmungsradius

$$R(z) = z + z_R^2/z$$

minimal ist. Einfaches Ableiten liefert, daß der minimale Krümmungsradius  $R_{\text{Min}}$  an der Stelle

$$z = z_R$$

erreicht wird mit

$$R_{\text{Min}} = 2 \cdot z_R$$

Ein kleinerer Krümmungsradius kann nicht mehr auftreten.

Die Divergenz des Strahls können wir nun leicht aus dem asymptotischen Verhalten des Feldes berechnen (siehe Abb.17) Da die Waist  $w(z)$  durch den Ast einer Hyperbel beschrieben wird, erhalten wir einen eindeutigen Grenzwert des Öffnungswinkels  $\Omega$ .

$$\text{tg}(\Omega) = \lim_{z \rightarrow \infty} [w(z)/R(z)] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ \frac{w_0 \cdot \sqrt{1 + (z/z_R)^2}}{z \cdot [1 + (z_R/z)^2]} \right\} = \frac{w_0}{z_R} = \frac{2/k}{w_0}$$

Für den Fall eines kleinen Öffnungswinkels  $\Omega$  haben wir dann:

$$\Omega \cdot w_0 = 2/k = \lambda/\pi \quad [52]$$

Dies ist wiederum nahezu identisch mit dem schon bei der Behandlung der "Mikrostäbchen" gefundenen Ausdruck. Je kleiner die Strahl-Taille oder je größer die Wellenlänge, desto größer wird die Divergenz des Strahls. Dies ist die notwendige Folge der unvermeidlichen Beugung. (Man beachte, daß der Öffnungswinkel  $\Omega$ , ebenso wie die Taille  $w_0$  nur die halbe  $1/e$ -Breite der Amplitude des Strahls beschreiben!)

## Gültigkeit der Näherung

Die bisher diskutierten Resultate haben wir erzielt unter der Annahme, daß die zweite Ableitung nach der  $z$ -Koordinate in der Differentialgleichung vernachlässigt werden kann. Anders formuliert bedeutet dies, daß

$$\left| \frac{\partial^2 f(r, \Phi, z)}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2 \cdot i \cdot k \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right|, \quad \left| \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right|$$

gelten muß. Mit der zuvor gefundenen, annähernden Lösung finden wir für die Terme auf der rechten Seite der Ungleichung:

$$2 * i * k * \frac{\partial f}{\partial z} = - 2 * i * k / q * [1 + i * y] * f,$$

$$1 / r * \frac{\partial f}{\partial r} = i * k / q * f, \text{ und}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = i * k / q * [1 + 2 * i * y] * f.$$

mit 
$$y = \frac{k * r^2}{2 * q}$$

Für die linke Seite der Ungleichungen gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 / q^2 * [1 + 2 * i * y - y^2 / 2] * f$$

Wir sehen, damit obige Ungleichung gilt, muß zumindest für kleine Werte von  $y$  (und damit von  $r$ ) gelten:

$$\frac{2}{|q(z)|^2} \ll \frac{k}{|q(z)|} \quad \text{oder} \\ |q(z)| \gg 2/k$$

Daraus folgt dann unter Verwendung von  $q(z) = z - i * z_R$ :

$$w_0 * w(z) \gg (2/k)^2$$

Da diese Ungleichung für alle  $z$  erfüllt sein soll, finden wir an der kritischsten Stelle bei  $z = 0$ :

$$z_R \gg 2/k \quad \text{oder} \quad w_0 \gg \lambda / \pi \quad [53]$$

Da wir andererseits für den Öffnungswinkel des Strahls haben:

$$\text{tg}(\Omega) * w_0 = \lambda / \pi,$$

muß für den Divergenzwinkel  $\Omega$  gelten:

$$\text{tg}(\Omega) \ll 1 \quad \text{oder} \quad \Omega \ll \pi/4 \quad [54]$$

Dies ist eine sehr deutliche Abgrenzung gegenüber Kugelwellen, und es ist verständlich, daß die Gauß'schen Strahlen nur eine adäquate Lösung der Wellengleichung darstellen können, wenn ihre Divergenz relativ klein ist. Gleichzeitig darf der Abstand  $r$  von der Achse nicht groß werden, denn sonst würde  $|y|$  zu groß, was die Ungleichung ebenfalls nicht erlaubt. Für sehr große  $|y|$  haben wir dann:

$$\frac{|y|^2}{|q|^2} \ll \frac{2 * k * |y|}{|q|}$$

Daraus folgt als Begrenzung für  $r$ :

$$\frac{r}{w(z)} \ll k * w_0 = \frac{R_{Min}}{w_0} \quad \text{oder} \quad \frac{r}{R_{Min}} \ll \frac{w(z)}{w_0}$$

( $R_{Min}$  ist der kleinste Krümmungsradius der Phasenfronten.) Bei  $z = 0$  bedeutet das dann:

$$r \ll R_{Min}$$

Diese Beschränkung ist nicht sehr gravierend im Vergleich zur ersten Bedingung, so daß die Limitierung von  $r$  in der Praxis kaum eine Rolle spielt, solange der Divergenzwinkel des Strahls hinreichend klein ist.

Wir haben somit die Bedingungen festgestellt, unter denen Gauß'sche Strahlen als sinnvolle Näherungslösungen der Wellengleichung in Frage kommen. Wie erwartet, sind nur Strahlen mit relativ kleiner Divergenz zugelassen. Dies ist insbesondere bei Optiken im mm oder sub-mm Bereich von Bedeutung, wo die Wellenlänge in

manchen Fällen mit den Öffnungen der Optik vergleichbar werden kann. In solchen Fällen sollte man auf die Anwendung von Gauß'scher Optik verzichten.

## Die allgemeine Lösung

Unsere Differentialgleichung liefert auch Lösungen im nicht-rotationssymmetrischen Fall, also wenn  $m \neq 0$  ist. Wir machen dazu wiederum einen Ansatz:

$$g(r,z) = u(r,z) * \text{Exp}\left\{ i * \frac{k}{2} * \frac{r^2}{q(z)} + p(z) \right\} \quad [55]$$

Eingesetzt ergibt das:

$$u_{rr} + \frac{1}{r} * u_r + 2 * i * k * \left[ \frac{r}{q} * u_r + u_z \right] + \\ + \left\{ k^2 * \frac{q_z - 1}{q^2} * r^2 + 2 * i * k * \left[ \frac{1}{q} + p_z \right] - \frac{m^2}{r^2} \right\} * u = 0$$

Damit der Term proportional zu  $r^2$  verschwindet, soll für  $q(z)$  wieder gelten:

$$q_z = 1, \quad \rightarrow \quad q(z) = z - i * z_R,$$

so daß auch hier die Überlegungen von vorher bezüglich des Gauß'schen Parameters  $q$  gelten. Insbesondere bleiben die Waist  $w(z)$  und der Krümmungsradius der Phasenfronten  $R(z)$  identisch wie oben.

Außerdem setzen wir voraus, daß mit dem Ansatz im Argument der Exponentialfunktion alle Phasen-Anteile bereits vollständig beschrieben sind. Deshalb verlangen wir, daß  $u(r,z)$  reell sein soll. Dementsprechend muß auch die Differentialgleichung für  $u$  ebenfalls rein reell sein. Zerlegen wir die Faktoren zu den Ableitungen  $u_r$  und  $u_z$  in Real- und Imaginärteil, dann finden wir, daß

$$r * \text{Re}[1/q(z)] * u_r + u_z = r/R(z) * u_r + u_z = 0$$

gelten muß. Versuchen wir zum Auffinden einer Lösung eine Vereinfachung mit dem Ansatz:

$$u(r,z) = u(x) \quad \text{mit} \quad x = \frac{2 * r^2}{w^2(z)} \quad [56]$$

Er bedeutet, daß die radiale Struktur des Wellenfeldes an jeder Stelle  $z$  selbstähnlich ist. Lediglich der Maßstab ändert sich als Funktion von  $z$  entsprechend der Entwicklung von  $w(z)$ . Dies entspricht der Beobachtung bei Laserstrahlen, deren laterale Struktur immer gleich aussieht, egal in welchem Abstand vom Laser man den Strahl betrachtet. Wir haben dann:

$$u_r = 4 * r / w^2 * u' \quad \text{und} \quad u_z = - 4 * r^2 * w_z / w^3 * u',$$

wobei  $u'$  die Ableitung von  $u$  nach  $x$  bedeutet. Da

$$w_z / w = 1/R(z),$$

erhalten wir nun tatsächlich das verlangte Ergebnis:

$$r/R(z) * u_r + u_z = 0.$$

Mit der 2-ten Ableitung nach  $r$

$$u_{rr} = 4/w^2 * u' + 16 * r^2/w^4 * u''$$

und der bekannten Zerlegung von  $1/q(z)$  erhalten wir dann als Differentialgleichung für  $u(x)$ :

$$x * u'' + (1-x) * u' + (i * k / 4 * w^2 * \{1/R(z) + p_z\} - 1/2 - [m/2]^2/x^2) * u = 0$$

Es ist klar, daß

$$i \cdot k / 4 \cdot w^2 * [1/R(z) + p_z]$$

nicht mehr von  $z$  abhängen darf, sondern konstant und reell sein muß, wenn die Differentialgleichung für  $u(x)$  reell und nur noch von der neu definierten Variablen  $x$  abhängen soll. Also setzen wir

$$i \cdot k / 4 \cdot w^2(z) * [1/R(z) + p_z(z)] = b/2.$$

$b$  ist eine reelle, aber vorläufig noch unbestimmte Integrationskonstante. Diese Differentialgleichung für  $p(z)$  können wir integrieren, da  $w(z)$  und  $R(z)$  bereits bekannt sind, und wir finden:

$$p(z) = C - \ln[w(z)/w_0] - i \cdot b \cdot \psi \quad \text{mit} \quad \psi = \arctan[z/z_R]. \quad [57]$$

$C$  ist wieder eine Integrationskonstante, die wir später durch die Normierungsbedingung ersetzen werden. Die Differentialgleichung für  $u(x)$  wird so:

$$x * u'' + (1 - x) * u' + ([b-1]/2 - [m/2]^2/x^2) * u = 0.$$

Für den zuvor behandelten Fall ( $m = 0$ ) muß  $b = 1$  gelten, damit eine konstante Funktion  $u(x) = \text{konst}$  ebenfalls Lösung der Differentialgleichung ist.

Wir können noch eine Vereinfachung bewirken, indem wir ansetzen:

$$u(x) = x^{m/2} * L(x) \quad [58]$$

(Wir betrachten nur nicht-negative Werte von  $m$ , bei negativen  $m$  verwenden wir dann den Betrag von  $m$ .) Dann erhalten wir:

$$x * L'' + [m+1 - x] * L' + [b-m-1]/2 * L = 0 \quad [59]$$

Dies ist die Differentialgleichung der verallgemeinerten Laguerre-Polynome. Die Lösung kann man durch den Ansatz einer Reihenentwicklung leicht finden. Setzen wir an:

$$L(x) = \sum_{n=0}^s a_n * x^n$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung finden wir dann:

$$\sum_{n=0}^{s-1} \{ (n+1) * (m+n+1) * a_{n+1} + ([b-m-1]/2 - n) * a_n \} * x^n + ([b-m-1]/2 - s) * a_s * x^s = 0$$

Damit diese Gleichung für alle  $x$  erfüllt ist, müssen alle Terme in der Summe verschwinden, und es muß deshalb gelten:

$$a_{n+1} = - \frac{[b-m-1]/2 - n}{(n+1) * (m+n+1)} * a_n$$

Dies ist eine Beziehung zwischen den Koeffizienten der Reihe, die sich iterativ auf den Koeffizienten  $a_0$  zurückführen läßt.

Der letzte Term am Ende der obigen Gleichung muß selbstverständlich ebenfalls verschwinden, oder die Summe hätte unendlich viele Glieder. Dies kann aber nicht erlaubt sein, wenn die gesamte Wellenfunktion für  $x \rightarrow \infty$  und daraus folgend für  $r \rightarrow \infty$  verschwinden soll (unser Strahlungsfeld soll senkrecht zur Ausbreitungsrichtung genügend schnell gegen Null gehen). Damit dies möglich ist, muß gelten:

$$[b-m-1]/2 - s = 0 \quad [60]$$

$b$  kann also nur ganz bestimmte Werte annehmen, da  $m$  und  $s$  ganzzahlig und positiv sind. Wir setzen deshalb:

$$b = 2 * s + m + 1, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

$b$  ist immer größer oder gleich 1, der zuvor behandelte Spezialfall mit  $m = 0$  war gleichzeitig auch der Fall mit  $s = 0$ .

Damit haben wir nun die Lösung unserer Differentialgleichung - die verallgemeinerten Laguerre-Polynome - gefunden mit:

$$L_s^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^s (-1)^n * \binom{s+m}{s-n} * \frac{x^n}{n!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad L_s^{(-m)} = L_s^{(m)}$$

oder

$$u^{(s,m)}(r,z) = \sum_{n=0}^s \frac{(-1)^n}{n!} * \binom{s+m}{s-n} * \left[ \sqrt{2} \cdot \frac{r}{w(z)} \right]^{m+2n} \quad [61]$$

Die Konstante  $a_0$  haben wir dabei entsprechend der üblichen Konvention festgesetzt auf:

$$a_0 = \frac{(s+m)!}{s! * m!}$$

Mit dieser Festlegung wird das Normierungsintegral:

$$\int L_s^{(m)}(x)^2 * x^m * e^{-x} * dx = \frac{(s+m)!}{s!}, \quad m \neq 0 \quad [62]$$

wie man nach etwas längerer Rechnung finden kann. Dies entspricht der üblichen Definition der verallgemeinerten Laguerre-Polynome (Siehe Handbook of Mathematical Functions, Edited by M.Abramowitz and I.A.Stegun, Dover Publications, Inc., New York, 9-te Auflage, 1970). Einige der Funktionen sind (für  $x \geq 0$ ):

$$L_0^{(m)}(x) = 1$$

$$L_1^{(m)}(x) = m+1 - x$$

$$L_2^{(m)}(x) = (m+1)*(m+2)/2 - (m+2)*x + x^2/2$$

Die "Quantenzahl" "s" steht somit für die Zahl von Knotenlinien des Feldes in radialer Richtung, während "m" die Knotenlinien in Azimutrichtung angibt. (Es sollte darauf verwiesen werden, daß die verallgemeinerten Laguerre-Polynome auch für nicht ganzzahlige m definiert sind, solange  $m > -1$  ist. Im Normierungsintegral ist dann die Fakultät als der entsprechende Ausdruck der Gamma-Funktion zu verstehen.)

Verbleibt noch die Festlegung der Integrationskonstanten C. Bleiben wir bei x als Variabler, dann haben wir als Normierungsintegral für unsere vollständige Lösung:

$$e^{2*c} * \frac{w_0^2}{w^2(z)} * \iint d\phi * r*dr * L_s^{(m)}(x)^2 * x^m * e^{-x} = 1$$

Wir verwenden, daß

$$r*dr = \frac{w^2(z)}{4} * dx \text{ ist,}$$

und erhalten:

$$e^{2*c} * \frac{w_0^2 * \pi}{2} * \frac{(s+m)!}{s!} = 1$$

oder

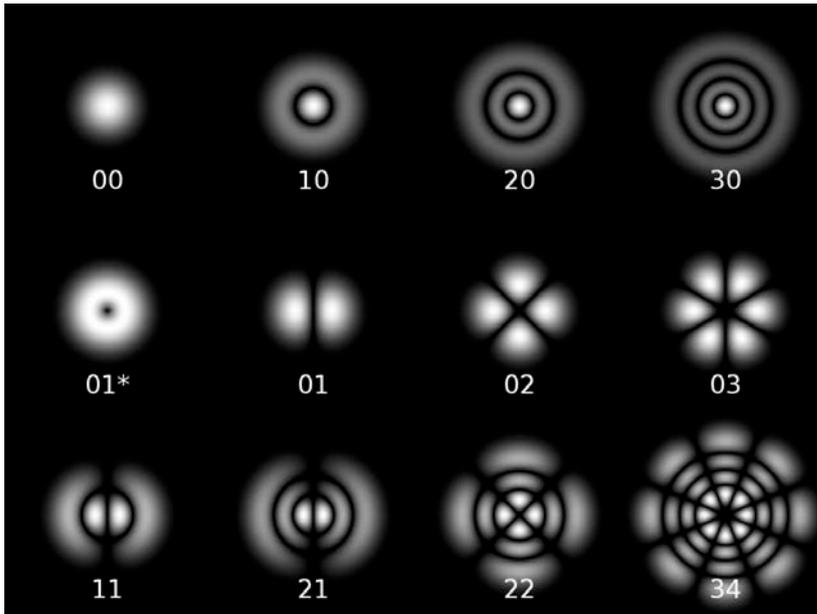
$$e^C = \frac{\sqrt{2/\pi}}{w_0} * \left[ \frac{s!}{(s+m)!} \right]^{1/2} \quad [63]$$

Einer der wichtigen Punkte bei den hier gefundenen Lösungen ist, daß sie einen orthonormalen Funktionensatz darstellen, womit jede beliebige Feldverteilung als Summe von Basisfunktionen

$$F^{(s,m)}(r, \Phi, z) = \sqrt{\frac{s!}{(s+m)!}} * \frac{\sqrt{2/\pi}}{w(z)} * L_s^{(m)}[2r^2/w^2(z)] * \left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right]^m * e^{-r^2/w(z)^2} * \text{Exp}\left\{ik\left[z + \frac{r^2}{2R(z)}\right] - (2s+m+1)\psi + m\Phi\right\} \quad [64]$$

dargestellt werden kann. Für negative m ist der Betrag von m einzusetzen mit Ausnahme des Faktors  $m\Phi$ . Die Orthogonalitätsbeziehung ist:

$$\iint r dr d\Phi * F^{(s,m)}(r, \Phi, z) * F^{(s',m')}(r, \Phi, z)^* = \delta_{s,s'} * \delta_{m,m'}$$



**Abb.18: Modenbilder:** Es handelt sich hier um das typische Bild von Resonatormoden einer zylindrischen Anordnung wie sie bei Gas-Lasern üblich ist. Es sind sogenannte TEM-Felder, das bedeutet: Transversal-Elektro-Magnetisch, was für die Eigenschaft steht, daß sowohl der elektrische als auch der magnetische Feldvektor immer senkrecht auf dem Ausbreitungsvektor stehen (wie z.B. im Freiraum). Die Zahlen geben an erster Stelle die Anzahl von radialen und an zweiter Stelle die Anzahl von azimuthalen Knotenlinien der Feldverteilung an. Die  $TEM_{00}$ -Mode ist eine reine Gauss-Verteilung.

Dies ist natürlich nur für solche Felder sinnvoll, die sich in einer Richtung bevorzugt ausbreiten, und deren Amplitude senkrecht zur Ausbreitungsrichtung hinreichend schnell abfällt. Anderenfalls würde die Reihenentwicklung für ein Feld  $G(r, \Phi, z)$

$$G(r, \Phi, z) = \sum_{s=0}^S \sum_{m=0}^M b_{s,m} * F^{(s,m)}(r, \Phi, z) \quad [65]$$

mit 
$$b_{s,m} = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\Phi * G(r, \Phi, z) * F^{(s,m)}(r, \Phi, z)^*$$

nur sehr langsam konvergieren. Wichtig ist, daß die Reihenentwicklung im Prinzip nur bezüglich der beiden Koordinaten  $r$  und  $\Phi$  erfolgt, während die  $z$ -Koordinate davon unbeeinträchtigt bleibt. Dies ist die logische Folge der Annahme, daß sich das elektromagnetische Feld hauptsächlich in  $z$ -Richtung ausbreitet, und daß es senkrecht dazu relativ schnell verschwindet. Das bedeutet im Prinzip auch, daß die Koeffizienten  $b_{s,m}$  nicht von  $z$  abhängen sollten. Daraus folgt aber, daß es eine eindeutig bestimmbare Strahl-Taille geben muß, und daß ebenso die Phasenfronten an dieser Stelle exakt eben sein müssen. Gleichzeitig muß die laterale Feldverteilung bei jedem  $z$  selbst-ähnlich sein, um noch mit Gauß'schen Strahlen beschreibbar zu sein. Da die Funktionen  $F^{(s,m)}(r, \Phi, z)$  komplex mit klar definierten

Phasen sind, ist im Prinzip eine Anpassung eines Feldes, von dem nur die Beträge der Amplituden bekannt sind, eigentlich unmöglich.

Alle Moden mit beliebigem  $s$  oder  $m$  breiten sich mit dem gleichen Gauß'schen Parameter  $q(z)$  aus. Also nimmt die Waist, wie zuvor besprochen, hyperbolisch zu, und der Krümmungsradius der Phasenfronten verhält sich ebenfalls für alle Moden gleich. Lediglich die Skalierung der radialen Feldverteilung ändert sich mit fortschreitendem  $z$ . Ebenso ist die Divergenz des Strahls für alle Moden identisch:

$$w_0 * \text{tg}[\Omega] = 2/k = \lambda/\pi$$

Zusätzlich haben wir die sehr einfache azimutale Winkelverteilung mit  $m$  Knotenlinien als Funktion des Winkels. Außerdem hat die Feldverteilung noch  $s$  Knotenlinien als Funktion des Radius, die von den  $L_s^{(m)}(x)$  erzeugt werden. Im Prinzip sind diese Knotenlinien zweizählig, da die  $L_s^{(m)}(x)$  Funktionen des Quadrates von  $r$  sind. Jedoch ist  $r$  nur positiv definiert, so daß die negativen Werte von  $r$  entfallen. Zuletzt kommt noch eine  $m$ -fache Nullstelle bei  $r=0$  dazu. Alle diese Knotenlinien ändern sich nicht bei fortschreitendem  $z$ ! Die radiale und azimutale Feldstruktur bleibt bei der Ausbreitung vollständig erhalten.

Bleibt noch anzumerken, daß ähnliche Lösungen der Wellengleichung auch in kartesischen Koordinaten gefunden werden können. Da es jedoch experimentell recht selten vorkommt, daß rechteckige Spiegel oder Blenden verwendet werden, wollen wir auf eine detaillierte Behandlung hier verzichten. Es sei nur erwähnt, daß die Lösungen für die  $x$ - bzw. die  $y$ -Koordinate zu den Hermiteschen Polynomen  $H_m(u_x)$  und  $H_n(u_y)$  mit dem Argument

$$u_x = \sqrt{2} * x/w(z) \quad \text{und} \quad u_y = \sqrt{2} * y/w(z)$$

führen. (Hier sind quadratische Spiegel angenommen.) An der primären Rolle des Gauß'schen Parameters  $q(z)$  ändert sich dabei nichts. Wir haben in diesem Fall:

$$F^{(m,n)}(x,y,z) = C * H_m(u_x) * H_n(u_y) * \exp\left\{ i * k * \left[ z + \frac{x^2 + y^2}{2 * q(z)} \right] + p(z) \right\}$$

Die Konstante  $C$  muß hier wiederum aus der Normierungsbedingung gefolgert werden. Es sei noch darauf verwiesen, daß auch astigmatische Optiken mit unterschiedlichen  $q_x(z)$  und  $q_y(z)$  so behandelt werden können.

## **"Abbildung" Gauß'scher Strahlen**

Eine sehr häufig vorkommende Aufgabe ist, zu einem vorgegebenen Laserresonator die dazu passenden Gauß'schen Strahlen als Eigenmoden des Resonators zu finden. Wir haben dies oben bereits während der Behandlung mit den Mitteln der geometrischen Optik andeutungsweise durchgeführt. Von einer exakteren, beugungstheoretischen Behandlung erwarten wir jedoch, daß die Resultate zumindest ähnlich sein sollten. Bevor wir dieses Problem angehen, sollten wir erst einmal feststellen, wie sich ein Gauß'scher Strahl beim Durchgang durch ein optisches System verändert. Wir haben bereits festgestellt, daß die innere Struktur eines Gauß'schen Strahls beim Fortschreiten auf der  $z$ -Achse vollständig erhalten bleibt, lediglich die Skalierung in radialer Richtung ändert sich. Dies drückt sich in dem Verhalten des Gauß'schen Parameters  $q(z)$  einfach so aus, daß sich  $q$  beim Fortschreiten vom Ort  $z_1$  zum Ort  $z_2$  ändert wie

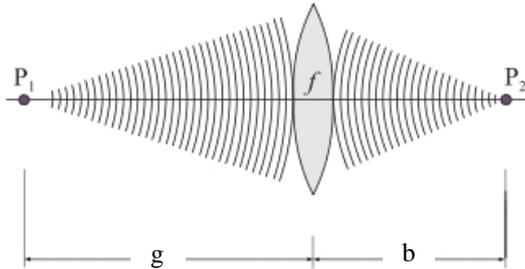
$$q(z_2) = q(z_1) + (z_2 - z_1). \quad [66]$$

Dadurch werden die beiden Größen  $w(z)$  und  $R(z)$  entsprechend

$$\frac{1}{q(z_2)} = \frac{1}{R(z_2)} + \frac{i * 2/k}{w^2(z_2)}$$

auch an der Stelle  $z_2$  klar definiert (siehe oben).

Etwas anders ist die Situation beim Durchgang durch eine Linse. Stellen wir uns wieder eine unendlich dünne Linse vor, und gehen wir wieder durch die Linse hindurch, ohne den Ort  $z$  wesentlich zu verändern. Dann ist klar, daß sich die Waist  $w(z)$  dabei nicht verändert, aber der Krümmungsradius  $R(z)$  (siehe Abb.19).



**Abb.19:** Änderung des Krümmungsradius der Wellenfronten beim Durchgang durch eine dünne Linse.

Eine Kugelwelle, die vom Krümmungsmittelpunkt  $P_1$  im Abstand  $g$  von der Linse ausgeht, wird wieder im Krümmungsmittelpunkt der von der Linse erzeugten, neuen Kugelwelle im Abstand  $b$  im Punkt  $P_2$  zusammenlaufen. Wir haben es somit exakt mit der Situation einer Abbildung eines Gegenstandes im Abstand  $g$  in ein Bild im Abstand  $b$  zu tun. Bei vorgegebener Brennweite der Linse  $f$  gilt also das Linsengesetz:

$$1/f = 1/g + 1/b$$

$g$  ist aber gleich dem Betrag des Krümmungsradius vor und  $b$  gleich dem Betrag des Krümmungsradius nach dem Durchgang durch die Linse. Wir können also schreiben:

$$\frac{1}{R'(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{1}{f} \quad \text{und} \quad w'(z) = w(z)$$

(Den Krümmungsradius  $R'$  rechnen wir negativ, wenn der Krümmungsmittelpunkt bei größerem  $z$  liegt als die dazugehörige Phasenfront.) Damit gilt für  $q(z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{q'(z)} &= \frac{1}{R'(z)} + \frac{i \cdot 2/k}{w'^2(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{1}{f} + \frac{i \cdot 2/k}{w^2(z)} = \\ &= 1/q(z) - 1/f, \quad \text{bzw.} \\ q'(z) &= \frac{f \cdot q(z)}{f - q(z)} \end{aligned} \quad [67]$$

Beide Transformationen des Gauß'schen Parameters  $q$  lassen sich mit dem sogenannten "ABCD-Gesetz" beschreiben. Hat man eine Matrix für die geometrische Beschreibung des Strahlengangs einer Optik in paraxialer Näherung, so wie wir sie eingangs besprochen haben,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

dann transformiert sich der Gauß'sche Parameter  $q$  entsprechend einer komplexen, linearen Abbildung wie

$$q' = \frac{A \cdot q + B}{C \cdot q + D}. \quad [68]$$

Wir hatten z.B. für die lineare Ausbreitung:

$$\mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Das ABCD-Gesetz liefert dann:

$$q' = \frac{1 \cdot q + z_2 - z_1}{0 \cdot q + 1} = q + z_2 - z_1,$$

wie auch zuvor verlangt. Ähnlich beim Durchgang durch eine dünne Linse:

$$\mathbf{T}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix},$$

$$q' = \frac{1 \cdot q + 0}{-1/f \cdot q + 1} = \frac{f \cdot q}{f - q}.$$

Wenn das "ABCD"-Gesetz also für alle einzelnen optischen Operationen gilt, dann gilt es auch für das Produkt vieler, aufeinanderfolgender optischer Operationen. Damit können wir dieses Gesetz als bewiesen betrachten.

Das ABCD-Gesetz ist sehr nützlich bei der Behandlung von Laseroptiken. Betrachten wir zum Beispiel mal die "Abbildung" eines Laserstrahls, dessen Taille  $w_0$  im Abstand  $a$  von der Eingangsapertur einer beliebigen Optik vorgegeben ist. Wir beschreiben die Optik mit der Matrix (siehe Gl.[7]):

$$\mathbf{T}(a,b) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta b/f & f \cdot [1 - \delta a \cdot \delta b/f^2] \\ -1/f & -\delta a/f \end{bmatrix}$$

$\delta a$  ist Abstand der Position der Eingangs-Taille vom eingangsseitigen Brennpunkt der Optik und  $\delta b$  der Abstand der Bild-Taille vom Brennpunkt an der Ausgangsseite der Optik. Wir haben dann für den neuen Gauß'schen Parameter entsprechend dem ABCD-Gesetz:

$$q' = \frac{-\delta b/f \cdot q + f \cdot [1 - \delta a \cdot \delta b/f^2]}{-1/f \cdot q - \delta a/f} \quad [69]$$

$q$  soll der Gauß'sche Parameter der Strahl-Taille an der Stelle  $a$  sein, also gilt:

$$q = -i \cdot z_R$$

Wir erhalten damit für  $q'$ , getrennt nach Real- und Imaginärteil:

$$q' = A/C - \frac{D/C}{D^2 + (z_R \cdot C)^2} - i \cdot \frac{z_R}{D^2 + (z_R \cdot C)^2} =$$

$$= \delta b - \frac{\delta a}{(\delta a/f)^2 + (z_R/f)^2} - i \cdot \frac{z_R}{(\delta a/f)^2 + (z_R/f)^2}$$

$-\text{Im}\{q'\}$  muß identisch mit der neuen Rayleigh-Länge  $z_R'$  sein, wir haben also für die neue Strahl-Taille:

$$w_0' = \frac{f}{\sqrt{[\delta a^2 + z_R^2]}} \cdot w_0 = \frac{2/k \cdot f}{w(\delta a)} = \lambda/\pi \cdot \frac{f}{w(\delta a)} \quad [70]$$

mit  $w(\delta a) = w_0 \cdot \sqrt{[1 + (\delta a/z_R)^2]}$

$w(\delta a)$  ist die Größe der Waist am Ort des Brennpunktes auf der Eingangsseite der Optik. Die Gauß'sche Waist transformiert sich also genauso, wie wir früher für die Strahlenbündel im Rahmen der rein geometrischen Optik gefunden hatten. Nur ist der mathematische Aufwand deutlich kleiner, wenn man die Gauß'sche Optik anwendet.

Dieses Ergebnis ist wichtig für die Verwendung von Lasern bei der Materialbearbeitung, wo es auf hohe Intensitäten im Fokus einer Linse, also auf kleines  $w_0'$  ankommt.  $w_0'$  wird dann klein, wenn die Eingangs-Waist am Orte des eingangsseitigen Brennpunktes groß ist. Für den Fall, daß  $\delta a$  sehr groß ist, können wir  $z_R$  vernachlässigen und erhalten das Resultat der geometrischen Optik für das Verhältnis von Gegenstands- und Bildgröße:

$$w_0' \approx f/\delta a * w_0$$

Nur in diesem Falle sind die Strahl-Tailen und die Begriffe aus der geometrischen Optik - Gegenstands- und Bildgröße - äquivalente Größen.

Aus obiger Gleichung für  $q$  finden wir auch die Position der Bild-Taille. Sie liegt an der Stelle, wo der Realteil von  $q'$  verschwindet, also wenn

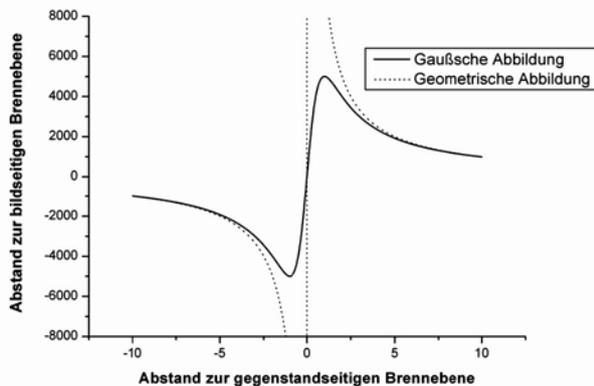
$$\delta b = \frac{f^2}{\delta a^2 + z_R^2} * \delta a = \frac{f^2}{R(\delta a)} \quad [71]$$

mit  $R(\delta a) = \delta a * [1 + (z_R/\delta a)^2]$

$R(\delta a)$  ist der Krümmungsradius der Eingangs-Phasenfronten am Ort des eingangsseitigen Brennpunktes der Optik.

Die Rayleigh-Länge  $z_R$  ist der Parameter, der über die Vergleichbarkeit zu geometrischen Größen oder den Einfluß der Beugung in optischen Systemen entscheidet. Besonders auffällig ist die Abweichung von der geometrischen Optik, wenn die Strahl-Taille auf der Eingangsseite genau im Brennpunkt der Optik liegt. Dann gilt, daß die Bild-Taille ebenfalls im Ausgangsbrennpunkt liegt, anstatt im Unendlichen, wie mit rein geometrischer Optik erwartet würde. Die neue Strahl-Taille ist dann:

$$w_0' = \frac{\lambda * f}{\pi * w_0} \quad \text{oder} \quad z_R * z_R' = f^2 \quad (\text{für } \delta a = \delta b = 0)$$



**Abb.20:** Position der Bildtaille als Funktion der Position der Eingangstaille  
Parameter:  $z_R = 1 \text{ mm}$ ,  $f = 100 \text{ mm}$ .  
Einheiten sind in mm

Dies ist für jede gegebene Optik mit einer Brennweite  $f$  die maximal mögliche Bild-Taille überhaupt. Aus der Beziehung zwischen Taille und Divergenz folgt dann auch, daß der so erzeugte neue Gauß'sche Strahl auch der mit minimaler Divergenz ist. Das entspricht wiederum der geometrischen Erwartung, da in der geometrischen Optik Strahlen aus dem Brennpunkt zu einem parallelen Strahlenbündel, also einem Bündel mit minimaler Divergenz werden. Sei noch die interessante Tatsache vermerkt, daß der  $1/e$  Radius an der Stelle  $\delta b = 0$ , also am bildseitigen Fokalfunkt der Optik immer gleich ist, egal in welchem Abstand  $\delta a$  sich die eingangsseitige (hier immer gleich angenommene) Waist befindet:

$$w'(\delta b=0) = f/[k/2 * w_R] = \frac{\lambda * f}{\pi * w_0} \quad \text{für beliebige } \delta a$$

Dieser Zusammenhang ist reziprok zu dem in Gleichung [70] gefundenen.

Es ist noch festzustellen, daß für  $\delta a = 0$  - woraus auch  $\delta b = 0$  für die Position der Bildtaille folgt - die Position der Bildtaille unabhängig von  $z_R$  und damit von der Wellenlänge der Strahlung ist. Nur in diesem Falle hat man keine chromatischen Fehler bei der Abbildung. In allen anderen Fällen wird sich die Lage der

Bildtaille mit der Wellenlänge verändern. Dies ist ein Fehler, der ausschließlich von der Beugung verursacht wird, und der nichts mit chromatischen Fehlern von Linsen zu tun hat. Besonders wichtig ist dies bei der Konstruktion von Radioempfängern, die auf zwei Frequenzen gleichzeitig an einem Radioteleskop betrieben werden sollen. Damit die verwendete Optik nicht zu unterschiedlichen Bildweiten führt, ist diese sogenannte "Gauß'sche Anordnung" die sicherlich geschickteste. Das zuvor behandelte Cassegrain-Teleskop (und übrigens auch alle anderen Teleskope) erfüllt diese Bedingung automatisch, wenn die Taille der Strahlung genau in den bildseitigen Brennpunkt des Teleskops gelegt wird. Dies ist aber ohnehin der günstigste Punkt, da mit der Taille an dieser Position, wie schon oben erwähnt, die Eingangstaille maximal wird, und somit die Divergenz des Antennendiagramms am Himmel minimal. Dies ist im Interesse der möglichst großen Winkelauflösung der Optik der anzustrebende Fall.

Die Position der Bild-Taille wird durch eine der "Dispersionskurve" des Brechungsindex ähnlichen Funktion von  $\delta a$  bestimmt. Dies ist in Abb.20 gezeigt. Der größte Abstand der Bild-Taille vom Brennpunkt ist für  $\delta a = z_R$  erreicht:

$$\delta b_{Max} = \frac{f^2}{2 * z_R}$$

An dieser Stelle haben wir für die Bild-Taille:

$$w_0' = \frac{f}{z_R * \sqrt{2}} * w_0 = \frac{\sqrt{2} * f}{k * w_0}$$

Das ist lediglich um den Faktor  $1/\sqrt{2}$  kleiner als man bei der Positionierung der Eingangstaille bei  $\delta a = 0$  erhält. Eine wirklich kleine Bild-Taille bekommt man also erst, wenn  $\delta a \gg z_R$  erreicht wird, wenn also die Eingangs-Taille sehr weit vor dem eingangsseitigen Brennpunkt der Optik liegt.

Umgekehrt ist es jedoch unmöglich, die Bild-Taille weiter weg als im Abstand  $\delta b_{Max}$  zu erzeugen! Das ist ebenfalls ein gewichtiger Unterschied zur geometrischen Optik, wo die Bildweite beliebig gelegt werden kann. Nur dort, wo  $z_R$  vernachlässigt werden kann, haben wir die Situation der geometrischen Optik mit:

$$\delta b = f^2 / \delta a \quad \text{oder} \quad b = b_f + \frac{f^2}{a - a_f}$$

Dieser Verlauf ist in Abb.20 gestrichelt eingezeichnet.

Für die Verhältnisse der Strahl-Tailen finden wir aus den obigen Gleichungen:

$$\frac{w_0'^2}{w_0^2} = \frac{\delta b}{\delta a}$$

Hinzu kommen noch die recht interessanten "Abbildungsgesetze" von vorher, die in anderer Schreibweise nun ergeben:

$$\frac{z_R'}{z_R} = \frac{\delta b}{\delta a} \quad [72]$$

$$\delta a * \delta b = f^2 - z_R * z_R'$$

oder

$$z_R' = \frac{z_R}{(\delta a / f)^2 + (z_R / f)^2} \quad [73]$$

$$\delta b = \frac{\delta a}{(\delta a / f)^2 + (z_R / f)^2}$$

Man beachte, daß die Größen  $\delta a$  und  $\delta b$  sich auf den Abstand der jeweiligen Tailen von den Brennpunkten der Optik beziehen.

## Gauß'sche Strahlen im Resonator

Mit den Mitteln der Gauß'schen Optik wollen wir nochmals das Problem eines optischen Resonators behandeln. Betrachten wir wieder zwei Spiegel im Abstand  $d$  und mit den beiden Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  bzw. den beiden Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$ . Wir nehmen wieder die Abbildungsmatrix für einen vollständigen Umlauf durch den Resonator, die wir bereits früher gefunden haben:

$$T = \begin{bmatrix} g - \frac{(z-z_0)}{f} & f * \left\{ 1 - g^2 + \frac{(z-z_0)^2}{f^2} \right\} \\ -1/f & g + \frac{(z-z_0)}{f} \end{bmatrix}$$

mit  $f = \frac{d/2}{g_1 + g_2 - 2 * g_1 * g_2},$

$$g = 2 * g_1 * g_2 - 1,$$

$$z_0 = 2 * f * g_2 * (1 - g_1)$$

und  $g_1 = 1 - d/r_1, \quad g_2 = 1 - d/r_2,$

wobei  $r_{1,2}$  die Krümmungsradien der beiden Spiegel sind.

Wenn wir es mit einem Resonator zu tun haben, dann muß aber gelten, daß der Gauß'sche Parameter  $q$  nach einem vollständigen Umlauf vollständig reproduziert wird, sonst hätten wir keine stabile Feldkonfiguration. Es muß also gelten:

$$q = \frac{A * q + B}{C * q + D}.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für  $q$ , die wir leicht lösen können:

$$q(z) = z - z_0 - i * f * \sqrt{[1 - g^2]} \quad [74]$$

(Wir wählen das negative Vorzeichen vor der Wurzel, um der Definition des Imaginärteils von  $q(z)$  weiter oben zu entsprechen.) Allgemein erhält man für eine beliebige ABCD-Matrix:

$$q(z) = (A - D) / 2C - i / 2C * \sqrt{[4 - (A + D)^2]}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist uns bereits bekannt:

$$\sqrt{[1 - g^2]} = 2 * \sqrt{[g_1 * g_2 * (1 - g_1 * g_2)]}$$

Wir haben für den Radikanden automatisch angenommen, daß er positiv sein soll. Anderenfalls würde  $q(z)$  rein reell, was jedoch ausgeschlossen ist. Die Strahl-Taille  $w_0$  würde dann unendlich groß, was unserer Annahme von seitlich begrenzten Lichtstrahlen widersprechen würde. Es folgt daraus also, daß die Werte von  $g_1$  und  $g_2$  nur in gewissen Bereichen zugelassen sind:

$$0 \leq g_1 * g_2 \leq 1. \quad (\text{oder } |A + D| / 2 \leq 1) \quad [75]$$

Dies ist aber exakt das Stabilitätskriterium für optische Resonatoren, was wir vorher durch rein geometrische Betrachtung gefunden hatten. (Den Fall des konfokalen Resonators, für den  $g_1 = g_2 = 0$  bzw.  $g = -1$  gilt, müßten wir hier noch getrennt betrachten. Wir können aber aufgrund der geometrischen Überlegungen von früher hier darauf verzichten.)

Die Strahl-Taille ist gegeben durch den Imaginärteil von  $q(z)$ :

$$z_R = k / 2 * w_0^2 = f * \sqrt{[1 - g^2]} = d * \frac{[g_1 * g_2 * (1 - g_1 * g_2)]^{1/2}}{g_1 + g_2 - 2 * g_1 * g_2}$$

oder  $w_0^4 = (\lambda / \pi)^2 * \frac{d * (r_1 - d) * (r_2 - d) * (r_1 + r_2 - d)}{(r_1 + r_2 - 2 * d)^2} \quad [76]$

Dieser Ausdruck entspricht beinahe exakt dem, den wir zuvor mit geometrischer Optik unter Anwendung einfacher Argumente bezüglich der Beugungseffekte ebenfalls gefunden hatten. Die Strahl-Taille liegt bei  $z = z_0$ , an dieser Stelle wird  $q(z)$  rein imaginär. Zur Erinnerung, wir können den Abstand zur Position der Strahl-Taille leicht finden, indem wir den Realteil von  $q(z)$  betrachten. Dieser gibt den Abstand zur Position der Strahl-Taille an. Nebenbei bemerkt, für Spiegel mit gleichem Krümmungsradius  $r_1 = r_2 = r$  vereinfacht sich die Formel zu:

$$w_0^2 = \lambda / (2\pi) * [d * (2r - d)]^{1/2} \quad \text{bzw.} \quad z_R = 1/2 * [d * (2r - d)]^{1/2}$$

Bleibt noch die Frage nach den Eigenfrequenzen des Resonators. Hierzu müssen wir die gesamte Phasenänderung beim einmaligen Umlauf durch den Resonator addieren. An dieser Stelle spielt die zusätzliche Phase  $\psi$  eine entscheidende Rolle. Wir haben oben gefunden, daß bei der Ausbreitung entlang der  $z$ -Achse ( $r = 0$ ) die Phase  $k * z$  um den Betrag:

$$\psi(z) = \text{arc tg}[(z - z_0) / z_R]$$

verringert wird. Die optische Weglänge ist also etwas kleiner als mit ebenen Wellen erwartet würde. Diese Korrektur wirkt sich bei der Eigenfrequenz des Resonators so aus, als wäre er etwas kürzer als erwartet. Die Eigenfrequenz steigt dementsprechend. Wir haben für einen vollständigen Umlauf, wenn wir die Positionen des Spiegels 2 bei  $z = 0$  und des Spiegels 1 bei  $z = d$  einsetzen:

$$\text{Phase} = 2 * \{ [k * (d - z_0) - (2 * s + m + 1) * \psi_2] - [k * (-z_0) - (2 * s + m + 1) * \psi_1] \}$$

$\psi_{1,2}$  sind dabei die Phasenkorrekturen am Ort der Spiegel 1, 2:

$$\psi_1 = \text{arc tg}[-z_0 / z_R] \quad \text{und} \quad \psi_2 = \text{arc tg}[(d - z_0) / z_R].$$

Insgesamt muß für vollständige Selbstreproduktion der Phase (konstruktive Interferenz) dann gelten, daß die Phase ein ganzzahliges Vielfaches von  $2 * \pi$  sein muß:

$$p * 2 * \pi = 2 * [k * d - (2 * s + m + 1) * \psi_R], \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad [77]$$

$$\text{mit} \quad \psi_R = \psi_2 - \psi_1.$$

Unter Anwendung von

$$\cos(\psi_R) = \frac{1 + \text{tg}(\psi_1) * \text{tg}(\psi_2)}{[ \{1 + \text{tg}^2(\psi_1)\} * \{1 + \text{tg}^2(\psi_2)\} ]^{1/2}}$$

finden wir:

$$\psi_R = \text{arc cos}[\sqrt{g_1 * g_2}]. \quad [78]$$

$$\text{Wegen} \quad v = c / \lambda$$

haben wir dann zum Schluß:

$$v_{p,s,m} = \frac{c}{2 * d} * \{ p + (2 * s + m + 1) * \psi_R / \pi \} \quad [79]$$

Auch diese Gleichung ist fast identisch mit dem aus der geometrischen Optik gefundenen Ausdruck. Der Phasenwinkel  $\psi_R$  entspricht dem Winkel  $\psi$  bei der geometrischen Betrachtung. Lediglich die Zuordnung der Eigenfrequenzen zu dem Erscheinungsbild des Strahlungsfeldes ist hier zusätzlich ersichtlich. Allerdings können wir aus der geometrischen Betrachtungsweise schließen, daß eine konstruktive Interferenz erst nach mehreren Umläufen zur Festlegung der Resonanzbedingung entscheidend ist. Felder mit radialen Knotenlinien erfahren die doppelte Verschiebung der Resonanzfrequenz wie solche mit azimuthalen Knotenlinien. Dies war aus der rein geometrischen Betrachtung nicht zu ersehen.

Interessant ist noch, wie sich die Phasenfronten am Ort der Spiegel verhalten. Wir haben am Spiegel 1 ( $z = 0$ ):

$$R_1 = -z_0 * [1 + (z_R / z_0)^2] = -r_1$$

und am Spiegel 2 ( $z = d$ ):

$$R_2 = (d - z_0) * [1 + (z_R / (d - z_0))^2] = r_2.$$

Die Krümmungsradien der Phasenfronten sind also identisch mit den Krümmungsradien der Spiegel, was ja auch nicht weiter überraschend ist.

Man kann die Betrachtungsweise auch umkehren: Will man eine bestimmte Feldverteilung in einem Laser-Resonator erzeugen, dann ist dies mit jeder Spiegelkombination zu erreichen, deren Oberflächen sich an den Positionen  $z_i$  der Spiegel an die Phasenfronten des Feldes anschmiegen. Es gibt also eine unendliche Vielfalt von Spiegelkombinationen, die alle das gleiche Strahlungsfeld erzeugen. Man bedenke dabei jedoch, daß es zu jedem vorgegebenen Krümmungsradius  $r$  entweder zwei oder keine Positionen  $z$  gibt entsprechend der Lösung der quadratischen Gleichung:

$$r = R(z) = z + z_R^2/z.$$

Die zugehörigen Lösungen sind:

$$z_{1,2} = r/2 \pm \sqrt{[(r/2)^2 - z_R^2]}.$$

Diese Lösungen sind nur dann reell, wenn

$$|r| \geq 2 * |z_R| = R_{\text{Min}}$$

ist. ( $R_{\text{Min}}$  ist der an der Position  $z = z_R$  gegebene kleinste Krümmungsradius der Phasenfronten des Feldes.) Interessanterweise lassen sich aus Spiegeln mit großen Krümmungsradien  $r$  entweder nur sehr kleine oder sehr lange Resonatoren aufbauen, da sowohl in unmittelbarer Nachbarschaft der Taille als auch in sehr großem Abstand der Krümmungsradius  $R$  sehr groß wird.

Der Fall des konfokalen Resonators mit

$$r_1 = r_2 = r = d$$

sollte hier ebenfalls erwähnt werden. In diesem Fall hat man nämlich:

$$z_R = r/2.$$

Also befinden sich die Spiegel genau an dem Grenzwert, wo Rayleigh-Länge und Brennweite der Spiegel identisch sind.

## Gauß'sche Strahlen im Cassegrain Teleskop

Kommen wir noch einmal auf das KOSMA Teleskop zurück. Wir hatten dort die Abbildungsmatrix:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1-d/f_1 & d \\ -1/f & 1-d/f_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad f = \frac{f_1 * f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

mit  $f_1 = 1300 \text{ mm}$ ,  $f_2 = -120 \text{ mm}$  und  $d = 1185 \text{ mm}$ .

Die Brennweite  $f$  der Cassegrain-Optik war demnach:

$$f = 31,2 \text{ m}.$$

Erinnern wir uns an die Positionen der Brennpunkte der Cassegrain-Optik vor und hinter dem Teleskop, da hatten wir für den Abstand des Bildfokus vom Subreflektor:

$$b_f = f * (1 - d/f_1) = 2,76 \text{ m}.$$

und für den Abstand des himmelseitigen Fokuspunktes vom Hauptreflektor:

$$a_f = f * (1 - d/f_2) = 339,3 \text{ m}$$

Zur optimalen Nutzung des Teleskops ist es wichtig, sich über die Konsequenzen der Beugung an der Apertur des Teleskops Gedanken zu machen. Man findet, daß bei Gauß-förmiger Ausleuchtung der Teleskop-Apertur die Nachweisempfindlichkeit gegenüber einer als punktförmig gedachten Signalquelle dann maximal wird, wenn der sogenannte "Taper" bei der Ausleuchtung bei etwa 11.4 dB liegt. Der Taper ist

die Angabe der Intensität der Ausleuchtungsfunktion am Rande des Teleskops in dB. Ein Taper von  $T = 11,4$  dB bedeutet also, daß die Randintensität

$$I_{Rand} = 10^{-T/10} * I_{Max} = 10^{-11,4/10} * I_{Max} = 0,07244 * I_{Max}$$

ist.  $I_{Max}$  ist dabei die Intensität in der Mitte des Teleskops. Daraus können wir den Gauß'schen Parameter der Ausleuchtungsfunktion unseres Cassegrain-Teleskops berechnen. Die Feldamplitude  $A$  ist proportional zur Wurzel der Intensität  $I$ . Wir haben also:

$$|A_{Rand}| = 10^{-T/20} * |A_{Max}| = 0,269 * |A_{Max}|$$

Dies vergleichen wir mit der Amplitudenverteilung eines Gauß'schen Strahls:

$$|A(r)| = |A_{Max}| * \text{Exp}\{-R_a^2/w^2\}$$

wobei  $R_a$  der Radius der Teleskop-Schüssel ist ( $R_a = 1,5$  m). Hieraus können wir die Waist am Ort des Primärspiegels des Teleskops bestimmen:

$$w = R_a * \left[ \frac{20}{T * \ln[10]} \right]^{1/2} = 1,31 \text{ m} \quad [80]$$

Um die bildseitige Taille zu bestimmen, müssen wir also entsprechend der Transformationsgesetze die Waist im Abstand der Brennweite ( $f = 31,2$  m) berechnen. Aus dem hyperbolischen Zusammenhang bei der Entwicklung der Waist bekommen wir:

$$w_0^2 = w^2/2 - \sqrt{[w^4/4 - (2/k*f)^2]}$$

Betrachten wir die Verhältnisse bei 0,5 mm (und 3 mm) Wellenlänge, dann erhalten wir:

$$w_0 = 3,79 \text{ mm} \quad (22,8 \text{ mm})$$

Das ist die Strahltaile in der Bildebene des Teleskops. Hier muß noch berücksichtigt werden, daß durch die Beugung an der Apertur des Teleskops natürlich kein wirklich Gauß'scher Strahl existieren kann, sondern zu der annähernd Gauß'schen Verteilung ein Beitrag hinzu kommt, der der Airy-Verteilung entspricht. Die Airy-Verteilung ist die Beugungsfigur, die bei homogener Ausleuchtung einer kreisförmigen Blende entsteht:

$$I(\alpha) = I_0 * \left[ 2 * \frac{J_1[k * R_a * \sin(\alpha)]}{k * R_a * \sin(\alpha)} \right]^2$$

$J_1(\alpha)$  ist die Besselfunktion erster Ordnung und  $\alpha$  ist der Winkel am Himmel. Die dabei auftretenden Nebenmaxima der Antennenkeule nehmen mit etwa  $1/\alpha^2$  ab, also nicht so schnell wie eine Gauß-Funktion. Die "Himmelstaille" ist durch die Beziehung

$$w_0' = \frac{2/k*f}{w_0} = 1,31 \text{ m}$$

gegeben, was bis auf die 5-te (4-te) Stelle nach dem Komma identisch mit der Waist auf dem Primärspiegel des Teleskops ist, obwohl die Position der Taille immerhin 339,3 m vor dem Teleskop liegt (siehe oben).

Bei dieser Waist haben wir eine "Gauß'sche" Divergenz des Strahls von:

$$\Omega = \pm 25,1'' \quad (\pm 150,5'')$$

Dies ist der Winkel, unter dem das Amplituden-Antennendiagramm auf den 1/e-Wert abfällt. Das Winkel-Auflösungsvermögen einer Optik ist üblicherweise definiert durch die Halbwertsbreite der Intensitätsverteilung der Antennenkeule. Der Winkel  $\Omega$  ist jedoch der 1/e Amplitudenwinkel bzw. der 1/e<sup>2</sup> Intensitätswinkel. Zur Umrechnung müssen wir also den Winkel  $X$  finden, bei dem die Intensität den halben Maximalwert einnimmt:

$$\text{Exp}\{-2*X^2/\Omega^2\} = 1/2$$

Daraus gewinnen wir für die Halbwertsbreite:

$$\Delta X_{1/2} = \sqrt{[2 * \ln(2)]} * |\Omega| = 29,5'' \quad (177,2'')$$

Dieser Wert ist erheblich kleiner, als der, der sich aus der Airy-Verteilung ergibt ( $\delta X_{1/2} \approx 3,233/(k \cdot R_a) \approx 35''$  (212'')). ( $\delta X_{1/2}$  hier ist die tatsächliche Halbwertsbreite und nicht die Lage der ersten Nullstelle der Airy-Scheibe, die bei  $X=3.832/(k \cdot R_a)$  liegt.) Das liegt selbstverständlich daran, daß die Beugung an der Apertur des Teleskops bei der Gauß'schen Berechnung nicht berücksichtigt wird. In der Realität wird die Divergenz sogar noch größer als die der Airy-Scheibe werden, da bei einem Taper ungleich 0 die Divergenz nur noch zunehmen kann.

Um ein Gefühl für den für die Beugung relevanten Bereich zu bekommen, sind die Rayleigh-Längen von großer Hilfe. Auf der Bildseite haben wir dafür:

$$Z_R = 90,4 \text{ mm} \quad (542,4 \text{ mm})$$

Man ist also gut beraten, wenn man abbildende, optische Komponenten in einem Abstand von der Bildebene anbringt, die groß gegenüber dieser Länge ist, da sich sonst die Beugung bei der Abbildung unerwartet störend auswirken kann. Wegen der großen effektiven Brennweite des Teleskops erhalten wir auf der "Himmels-Seite" des Teleskops die Rayleigh-Länge:

$$Z_R' = f^2/z_R = 10,8 \text{ km} \quad (1,8 \text{ km}) !$$

Die Bilder von Gegenständen, die sich näher als knapp 11 km (2 km) am Teleskop befinden, sind also bei der Abbildung noch starken Veränderungen durch die Beugung unterworfen. In diesem Abstand hat sich die Waist erst auf etwa 1,85 m vergrößert. Das gilt natürlich nur für die sogenannte Hauptkeule, die durch Beugung entstehenden Nebenkeulen sind wesentlich weiter ausgedehnt. Es ist einigermaßen überraschend, daß selbst in so großer Entfernung die Beugung noch immer eine so wesentliche Rolle spielt.

Die tatsächliche Beugungsstruktur kann bequem in Fraunhofer'scher Näherung berechnet werden. Hier hat man:

$$I(\alpha, \mathbf{c}) = N * \left| \frac{\text{Exp}\{i*k*R\}}{R} * \int_{R_i}^{R_a} r*dr \int_0^{2*\pi} d\Phi * A(r, \Phi) * \text{Exp}\{i*k*r*\sin(\alpha)*\cos(\chi+\Phi)\} \right|^2$$

$\alpha$  ist der Winkel der Verbindungslinie zwischen Mittelpunkt der Teleskopöffnung und dem Aufpunkt in der Beobachtungsebene mit der Flächennormalen des Teleskops,  $\chi$  der Azimutwinkel in der Beobachtungsebene und  $R$  der Abstand des Beobachtungsortes von der Mitte der Teleskopöffnung.  $R_i$  und  $R_a$  sind die Radien des Subreflektors bzw. des Primärspiegels.  $N$  dient zur Normierung und ergibt sich aus den sonstigen "Randbedingungen" des Problems.

Wir betrachten den Fall einer Gauß-förmigen Ausleuchtungsfunktion

$$A(r, \Phi) = \sqrt{[P/(\pi/2*w^2)]} * \text{Exp}\{-r^2/w^2\}$$

$$\text{mit} \int_0^\infty r*dr \int_0^{2*\pi} d\Phi * |A(r, \Phi)|^2 = P. \quad [83]$$

$P$  ist gleich der insgesamt im Strahl enthaltenen Leistung.

Im Zentrum, also bei  $\alpha = 0$ , erhalten wir damit die abgebeugte Intensität:

$$\begin{aligned} I(0, 0) &= N/R^2 * \left| \int_{R_i}^{R_a} r*dr \int_0^{2*\pi} d\Phi * A(r, \Phi) \right|^2 = \\ &= P * N/R^2 * 2*\pi*w^2 * [\text{Exp}\{-R_i^2/w^2\} - \text{Exp}\{-R_a^2/w^2\}]^2 \end{aligned} \quad [84]$$

Vergleichen wir dieses Beugungssignal mit dem idealen Zustand der Beugung einer homogenen Ausleuchtung, die innerhalb der Fläche des Hauptspiegels die gleiche Lichtleistung enthält, dann haben wir für die entsprechende Amplitude  $A_0(r, \Phi)=A_0$  innerhalb des Radius  $r \leq R_a$ :

$$|A_0|^2 = P/(\pi*R_a^2) \quad [85]$$

Daraus folgt also für diesen hypothetischen Fall:

$$I_0(0,0) = N/R^2 * \left| \int_0^{R_i} r * dr \int_0^{2\pi} d\Phi * A_0 \right|^2 = P * N/R^2 * \pi * R_a^2 \quad [86]$$

Die relative abgebeugte Intensität ist damit:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= I(0,0)/I_0(0,0) = \\ &= \frac{2 * w^2}{R_a^2} * [Exp\{-R_i^2/w^2\} - Exp\{-R_a^2/w^2\}]^2 \end{aligned} \quad [87]$$

Dies beschreibt die sogenannte "Apertur-Effizienz". Ihr Wert gibt an, welche Empfindlichkeit das Teleskop gegenüber einer Punktlichtquelle besitzt, wenn mit einem hypothetischen Teleskop verglichen wird, das den Taper "0" besitzt, aber keine sogenannten "spill-over Verluste" besitzt. Bei einem "Off-Axis" Teleskop, bei dem kein Subreflektor im Weg steht, kann eine Apertur-Effizienz von maximal etwa 81,5% erreicht werden. Beim Gorniergrat-Teleskop, das einen On-Axis Subreflektor besitzt ( $R_i = 190$  mm,  $R_a = 1500$  mm) fällt diese Zahl auf 77,0%. Hierzu gehört ein Taper von 10,5 dB ( $w = 0,892 * R_a$ ), während im ersten Fall sich ein "optimaler" Taper von 10,9 dB ( $w = 0,908 * R_a$ ) ergibt.

Die Halbwertsbreite kann nun aus dem obigen Integral ebenfalls gewonnen werden. Im Vergleich dazu sind die Halbwertsbreiten des entsprechenden Gauß'schen Strahls und der Airy-Scheibe immer etwas kleiner. Bei niedrigem Taper differieren die exakte und die Gauß'sche Breite erheblich, da die Abschattung durch den Subreflektor das erheblichen Einfluß auf die Abstrahlung besitzt. Bei großem Taper nähern sich die Werte aneinander. Die Breite der Airy-Scheibe ist umgekehrt etwa gleich der wahren Halbwertsbreite bei niedrigem Taper, unterscheidet sich aber bei großem Taper erheblich.

Interessant ist nun auch die Frage, wieviel der Leistung ist in der eigentlichen Hauptkeule des Antennendiagramms enthalten. Dies entscheidet über die Frage wieviel vom insgesamt empfangenen Signals, insbesondere bei einigermaßen ausgedehnten Quellen, denn nun tatsächlich aus der anvisierten Richtung kommt, und welcher Bruchteil aus anderen Bereichen stammt, über deren Verteilung man aber kaum etwas weiß. Die auch "Main Beam Efficiency" genannte Effizienz ist definiert als:

$$\eta_{MB} = \frac{\int_{\text{Hauptkeule}} I(\alpha, \chi) * d\Omega}{4 * \pi} \quad [89]$$

Offensichtlich ist der relative Hauptkeulenanteil klein bei kleinem Taper, da das meiste der einfallenden Leistung neben die Öffnung des Teleskops fällt. Bei sehr großem Taper steht vermehrt der Subreflektor im Weg. Hier ist also ein Off-Axis Teleskop von großem Vorteil.

Ein wichtiger Begriff ist der sogenannte "Solid Beam Angle". Er ist definiert als:

$$\Omega_B = 1/I_{\text{max}} * \int_{2 * \pi} I(\alpha, \chi) * d\Omega \quad [89]$$

Dieser (Raum-) Winkel beschreibt einen Kegel mit über den Winkel  $\Omega_B$  konstanter Signalempfindlichkeit, die bei einer gleichmäßigen Helligkeitsverteilung am Himmel die gleiche Signalleistung liefern würde, wie es die reale Antenne tut. Die Empfindlichkeit ist dabei die gleiche wie die der realen Antennenfunktion bei der Position "0" ( $\alpha = \chi = 0$ ). Es handelt sich also um die Beschreibung einer "idealisierten" Antenne gleicher räumlicher Auflösung. Hierbei wird sinnvollerweise der Anteil der rückwärtigen Antennenverteilung nicht berücksichtigt, deshalb die Integration über lediglich  $2 * \pi$ .

### 3.) Die Eigenschaften von optischen Resonatoren

Eine sehr häufige Anwendung von optischen Resonatoren ist deren Verwendung als passive, optische Filter. Schon in der Vor-Laserzeit wurden hochaufgelöste, optische Spektren von Hyperfeinstrukturen atomarer Übergänge zum Beispiel mit solchen, sogenannten "Fabry-Perot Interferometern" durchgeführt. Seit es Laser gibt, sind natürlich die Resonatoren für den Laser selbst von entscheidender Bedeutung, jedoch sind auch passive Fabry-Perots als spektrales Analyseinstrument von Laser-Emissionen sehr gefragt. Deshalb ist das Thema, wie ein solcher Resonator an ein Laserfeld ankoppelt, sehr bedeutsam.

Zunächst einmal wollen wir ein ganz simples Modell anwenden, das dem Prinzip der "Mikadostäbchen" weitgehend entspricht. Wir stellen uns vor, daß eine Feldamplitude  $E_0$  auf den ersten, teildurchlässigen Spiegel des Fabry-Perots auftrifft.

Die Teilamplitude, die in den Resonator eintritt sei:

$$E_t = \sqrt{t_1} * E_0$$

$t_1$  ist der Transmissionskoeffizient für die Intensität des ersten Spiegels, und  $\sqrt{t_1}$  somit der Transmissionskoeffizient der Amplitude des Feldes. Nach Durchlaufen der Strecke bis zum zweiten Spiegel und nach dem Durchtritt durch diesen Spiegel haben wir dann:

$$E_{t_1} = \sqrt{t_1} * e^{i*k*d} * \sqrt{t_2},$$

wobei  $d$  der Abstand zwischen den Spiegeln ist und  $k$  der Betrag des Wellenvektors.  $t_2$  ist der Transmissionkoeffizient des Spiegels 2. Ein Teil der Amplitude wird am Spiegel 2 reflektiert, dann wieder am Spiegel 1, und davon wiederum ein Teil wird dann ebenfalls durch den Spiegel 2 austreten und so fort. Wir erhalten also eine unendliche Summe von Teilamplituden mit:

$$\begin{aligned} E_T &= E_0 * (\sqrt{t_1} e^{i*k*d} * \sqrt{t_2} + \\ &\quad + \sqrt{t_1} e^{i*k*d} * \sqrt{r_2} * e^{i*k*d} * \sqrt{r_1} * e^{i*k*d} * \sqrt{t_2} + \dots) = \\ &\quad \sqrt{[t_1 * t_2]} * e^{i*k*d} \\ &= E_0 * \frac{\sqrt{[t_1 * t_2]} * e^{i*k*d}}{1 - \sqrt{[r_1 * r_2]} * e^{2*i*k*d}}. \end{aligned} \quad [92]$$

$r_1$  und  $r_2$  sind die Reflexionskoeffizienten für die Intensität an beiden Spiegeln.

Ebenso können wir die vom Fabry-Perot reflektierte Amplitude betrachten. Dafür haben wir:

$$\begin{aligned} E_R &= E_0 * (-\sqrt{r_1} + \sqrt{t_1} e^{i*k*d} * \sqrt{r_2} * e^{i*k*d} * \sqrt{t_1} + \\ &\quad + \sqrt{t_1} e^{i*k*d} * \sqrt{r_2} * e^{i*k*d} * \sqrt{r_1} * e^{i*k*d} * \sqrt{r_2} * e^{i*k*d} * \sqrt{t_1} + \dots) \\ &= E_0 * [-\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} * \frac{t_1 * e^{2*i*k*d}}{1 - \sqrt{[r_1 * r_2]} * e^{2*i*k*d}}] \end{aligned} \quad [93]$$

Die erste, reflektierte Teilamplitude muß einem Phasensprung von  $\pi$  gegenüber der transmittierten Amplitude unterworfen sein, wie man aus den Gesetzen der Elektrodynamik folgert (siehe die einschlägigen Lehrbücher). In den meisten Fällen sind die Spiegel identisch, so daß wir  $t_1 = t_2 = t$  und  $r_1 = r_2 = r$  setzen können. Die zuvor gemachte Unterscheidung soll jedoch zeigen, wie man vorzugehen hat, wenn man kompliziertere Resonatoren, wie zum Beispiel Ringresonatoren, untersuchen will.

## Transmittierte und reflektierte Intensität

Üblicherweise ist man mehr an der Intensität der durchtretenden Strahlung interessiert, deshalb bilden wir zunächst das Betragsquadrat der transmittierten Amplitude:

$$I_T(k) = I_0 * \frac{t_1 * t_2}{(1 - \sqrt{r_1 * r_2})^2 + 4 * \sqrt{r_1 * r_2} * \sin^2[k * d]} \quad [94]$$

Diese Funktion ist unter dem Namen "Airy-Funktion" in der Literatur bekannt, und sie zeigt den typischen, periodischen Verlauf als Funktion der Frequenz ( $f = c/\lambda$ ), wie in Abb.21 dargestellt. Ändert sich die Frequenz um  $\Delta f = c/(2 * d)$ , dann ist die Transmission wieder identisch wie vorher. Wir können somit den Ausdruck " $k * d$ " umwandeln in " $\pi * f / \Delta f$ ", wenn wir das Verhalten als Funktion der Frequenz darstellen wollen. Den Frequenzabstand  $\Delta f$  kennen wir als den "Freien Spektralbereich" oder "Free Spectral Range" FSR, häufig allerdings in Einheiten " $\text{cm}^{-1}$ ":

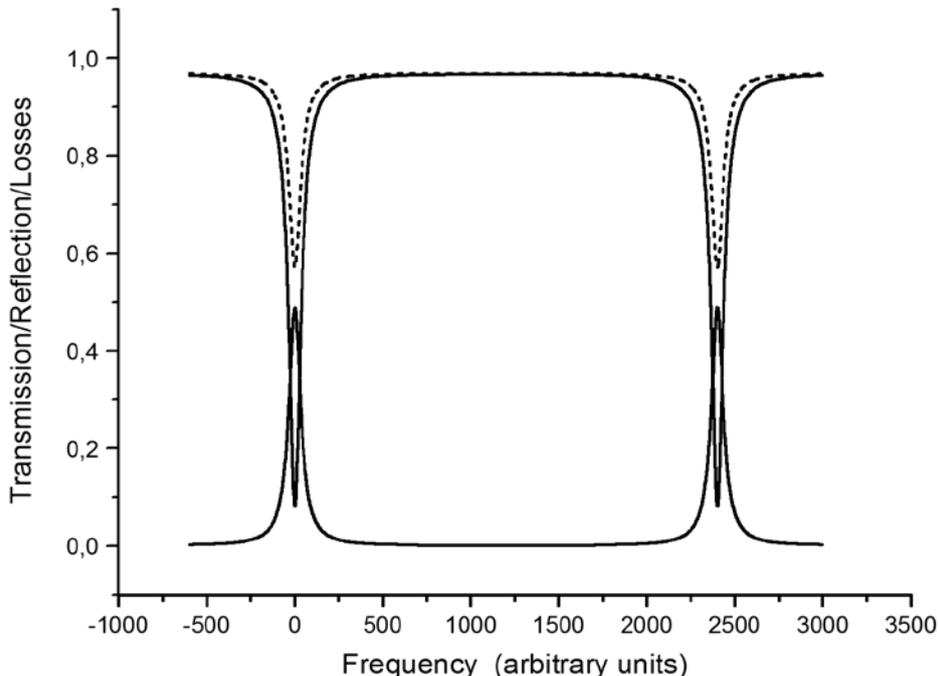
$$FSR = \frac{1}{2 * d} [\text{cm}^{-1}] \quad [95]$$

Er ist identisch mit dem longitudinalen Modenabstand, den wir vorher für die Resonanzen eines Spiegelresonators gefunden hatten.

Für die reflektierte Intensität finden wir:

$$I_R(k) = I_0 * [r_1 + t_1 - \frac{t_1 * [1 - r_2 * (r_1 + t_1)]}{(1 - \sqrt{r_1 * r_2})^2 + 4 * \sqrt{r_1 * r_2} * \sin^2[k * d]}]$$

Der Verlauf dieser Funktion ist auch in Abb.21 zu sehen. Theoretisch sollte die Summe aus Transmissionskoeffizienten  $t_i$  und Reflexionskoeffizienten  $r_i$  der Spiegel gleich 1 sein, Addiert man die dann die transmittierte und reflektierte Intensität zusammen, dann erhält man die gesamte, einfallende Intensität. Das bestätigt noch einmal den Phasensprung bei der Reflexion am ersten Spiegel.



**Abb.21:** Transmission und Reflexion eines Fabry-Perot Resonators. Für die Darstellung ist  $t_1=t_2=7\%$  und  $r_1=r_2=90\%$  gesetzt ( $F = 29.9$ ). 1-Gesamtverlust ist gepunktet dargestellt. ( $I_T^{Max} = 49\%$ ,  $I_T^{Min} = 0.136\%$ ,  $I_R^{Max} = 96.75\%$ ,  $I_R^{Min} = 8.1\%$ ,  $I_V^{Max} = 42.9\%$ ,  $I_V^{Min} = 3.11\%$ )

Wir berücksichtigen noch die normalerweise unvermeidlichen Verluste an den Spiegeln, deshalb schreiben wir:

$$r_i + t_i = 1 - v_i \quad [96]$$

mit  $v_i$  gleich den Verlustkoeffizienten der Spiegel. Typische Werte von  $v$  sind im Bereich von einigen Prozent für metallische Spiegel und von einigen Zehntel Prozent für dielektrische Spiegel (im optischen Spektralbereich). Berücksichtigt man diesen Sachverhalt, dann findet man natürlich, daß die Summe von transmittierter und reflektierter Intensität

$$I_T + I_R < I_0$$

ist. Es zeigt sich aber für  $v \neq 0$  sogar, daß diese Summe unter Umständen sogar stark frequenzabhängig ist. Der Verlust

$$I_V = I_0 - I_T - I_R$$

als Funktion der Frequenz ist in Abb.21 ebenfalls dargestellt.

Diese Überlegungen gelten natürlich nur dann, wenn die relativen Verluste der Spiegel intensitätsunabhängig sind. Wir haben dann für die Maximal- und Minimalwerte der Transmission und der Reflexion:

$$\begin{aligned} I_T^{Max} &= I_0 * \left[ 1 - \frac{v}{1-r} \right]^2 & I_T^{Min} &= I_0 * \left[ \frac{2-v}{1+r} - 1 \right]^2 \\ I_R^{Max} &= I_0 * r * \left[ \frac{2-v}{1+r} \right]^2 & I_R^{Min} &= I_0 * r * \left[ \frac{v}{1-r} \right]^2 \end{aligned} \quad [97]$$

mit  $r + v + t = 1$

Man sieht, welche entscheidende Rolle der Verlustanteil  $v$  bei den Extremwerten der Intensitäten spielt. Beispielsweise hätte ein Fabry-Perot mit einem relativ geringen Verlust von 1% pro Spiegel, was übrigens die Beugungsverluste an den Spiegeln mit einschließen sollte, einem Reflexionskoeffizienten  $r = 0,98$  und einer Transmission von 1% nur noch eine Maximaltransmission von 25%. Die dabei gleichzeitig auftretende Gesamtreflexion ( $I_R^{Min}$ ) ist 24,5%. Es verschwinden also über 50% der Lichtintensität durch die Verluste der Spiegel. Im umgekehrten Fall der minimalen Transmission und maximalen Reflexion ist es dagegen nur etwa 1% der einfallenden Intensität, die insgesamt verlorengehen. Die Vielstrahlinterferenz führt also zu erheblichen Modifikationen der Verluste.

## Die Phase im Resonator

Wir hatten für die Amplitude des transmittierten Strahls eines Fabry-Perot-Resonators ( $r_1 = r_2 = r$  und  $t_1 = t_2 = t$ ):

$$E_T(k) = E_0 * \frac{t * e^{i*k*d}}{1 - r*e^{2*i*k*d}}$$

Wir können dies umschreiben in:

$$E_T(k) = E_0 * t * \frac{e^{i*[k*d + \Theta(k)]}}{[(1-r)^2 + 4*r*\sin^2(2*k*d)]^{1/2}} \quad [98]$$

$$\text{tg}[\Theta(k)] = \frac{r*\sin(2*k*d)}{1 - r*\cos(2*k*d)}$$

$\Theta$  ist die zusätzliche Phase gegenüber der einer ebenen Welle. Der Verlauf als Funktion der Frequenz ist in Abb.22 gezeigt. Der Maximalwert von  $\Theta$  wird bei

$$\cos(2 * k_{\text{Max}} * d) = r$$

erreicht. Der Wert von  $\Theta$  ist dann gegeben durch:

$$\text{tg}[\Theta_{\text{Max}}] = \frac{r}{\sqrt{[1-r^2]}}$$

Je kleiner der Reflexionskoeffizient  $r$  ist, desto kleiner werden auch die maximalen Phasenänderungen  $\Theta_{\text{Max}}$ . Zum Beispiel, für  $r = 90\%$  finden wir für  $\Theta_{\text{Max}}$ :

$$\Theta_{\text{Max}} = 64,2^\circ$$

Bei  $r = 50\%$  sind es nur noch  $30^\circ$ . Die im ersten Fall dafür notwendige Änderung von  $k$  bzw. der Frequenz ist dann lediglich etwa 7% des freien Spektralbereichs des Fabry-Perots und im zweiten Fall etwa 17%. Dieser Wert ist unabhängig vom Transmissionsvermögen bzw. den Verlusten der Spiegel.

Die Steigung der Phasenänderung ist maximal exakt in Resonanz, also bei

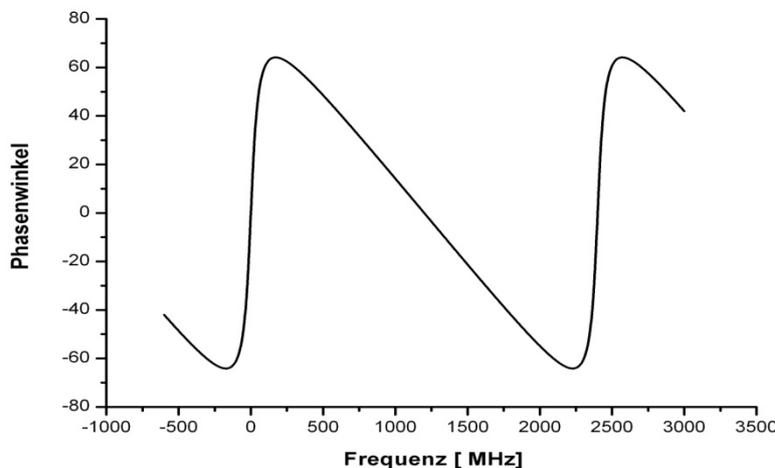
$$k_m * d = m * \pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{oder } \nu_m = m * \text{FSR}$$

Wir finden dafür:

$$\frac{d\Theta}{d\nu|_{\text{Max}}} = \frac{\pi}{\text{FSR}} * \frac{2 * r}{1 - r} \quad [99]$$

Betrachten wir ein Beispiel: Ein Fabry-Perot mit 50 cm Länge hat einen freien Spektralbereich von 300 MHz. Wenn man Spiegel mit der Reflektivität  $r = 98\%$  verwendet, dann ändert sich in Resonanz der Phasenwinkel  $\Theta$  um 1 Grad, wenn sich die Frequenz um lediglich 17 kHz ändert! Das stellt eine enorme Empfindlichkeit dar, mit deren Hilfe man erwarten kann, Laser mit einer Stabilität im 1 kHz-Bereich stabilisieren zu können.



**Abb.22:** Verlauf der Phase im Fabry-Perot,  $\text{FSR} = 2,5 \text{ GHz}$ ,  $r = 90\%$

Die Variation der Phase mit der Frequenz kann dazu genutzt werden, um eine exakte Information über die relative Lage der Laserfrequenz zur Resonanzfrequenz des Resonators zu bekommen. Das geht z.B. dadurch, daß man den Ausgangsstrahl des Fabry-Perots mit einem Teil des Eingangsstrahls überlagert. In der auftretenden Interferenz wird der Phasenwinkel dann sofort sichtbar. Die Überlagerung mit dem Eingangsstrahl ist besonders einfach, wenn man für die zwei möglichen Polarisationsrichtungen der Laserstrahlung die Güte des Resonators stark verschieden macht. Dies geht zum Beispiel ganz einfach durch den Einbau einer Brewster-Platte in das Fabry-Perot. Koppelt man mit einer relativ dazu verkipperten Polarisation in den Resonator ein, dann hat man für die beiden Polarisationskomponenten verschiedene Resonatorgüten, und der Phasenwinkel wird im austre-

tenden Strahl direkt sichtbar. So läßt auf einfache Weise ein Regelsignal für die Laserfrequenz gewinnen, wobei im Prinzip keinerlei Modulation benötigt wird.

## Finesse

Für die Qualität eines Resonators ist auch immer die Halbwertsbreite der Resonanz von Bedeutung. Diese sind nicht nur durch die Spiegelverluste, sondern auch durch die Spiegeltransmissionen bestimmt. Hierzu lassen sich mehrere Definitionen einführen, die auch in der Literatur unterschiedlich gehandhabt werden. Wir wollen hier uns weitgehend an experimentelle Gegebenheiten halten, was bedeutet, daß wir die Halbwertsbreite auf der halben Höhe zwischen Minimal- und Maximalwert der Intensität definieren. Das hat den Vorteil, daß man immer noch eine Halbwertsbreite angeben kann, auch wenn die Minimalintensität bereits mehr als 50% betragen sollte. Wir betrachten den Fall der Transmission und finden mit der Forderung

$$I(k_0 \pm \delta k_{1/2}) = 1/2 * (I_{Max} + I_{Min}),$$

$$\text{mit } I(k_0) = I_{Max},$$

und mit der Definition der Halbwertsbreite

$$\delta v_{1/2} = c/(\pi * d) * \delta k_{1/2}:$$

$$\begin{aligned} \delta v_{1/2} &= \frac{c}{\pi * d} * \arcsin[I_{Min}/(I_{Max} + I_{Min})]^{1/2} \\ &= \frac{c}{2 * d} * 2/\pi * \arcsin\{(1-r)/[2*(1+r^2)]^{1/2}\} \\ &= \frac{c}{2 * d} * 2/\pi * \arcsin\{(1-r)/(1+r)\} \end{aligned}$$

Bei verschwindendem  $I_{Min}$ , also bei wenig Verlusten und großem  $r$  gilt dann:

$$\delta v_{1/2} \approx \frac{c}{2 * d} * \frac{2}{\pi} * \frac{1-r}{1+r} \approx FSR * \frac{1-r}{\pi * \sqrt{r}}$$

Die letzte Umformung ist für nicht zu kleine  $r$  statthaft, da

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{[1-(1-r)]}} \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2} * (1-r)} = \frac{2}{1+r}$$

Der Zusammenhang zwischen freiem Spektralbereich und Halbwertsbreite wird häufig mit der sogenannten "Finesse"  $F$  formuliert:

$$F = \frac{FSR}{\delta v_{1/2}} \approx \pi/2 * \frac{1+r}{1-r} \approx \frac{\pi * \sqrt{r}}{1-r}, \quad [100]$$

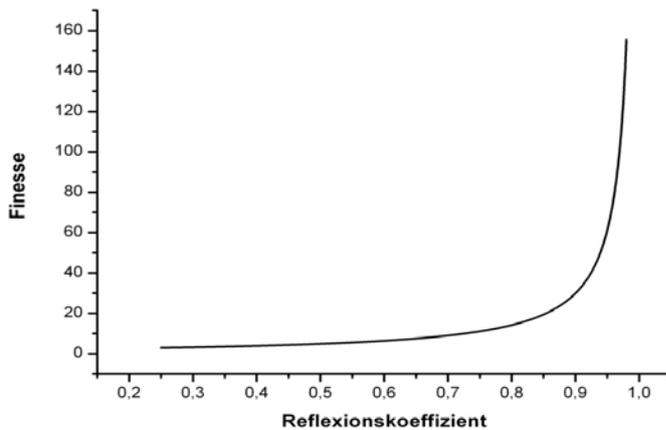
was die Standardspezifikation für Fabry-Perot-Interferometer ist. Die letzte Umformung wird üblicherweise in der Literatur verwendet.

Betrachten wir dazu nochmals unseren vorher behandelten Fall eines einprozentigen Verlustfaktors  $v$  und einer 98%-prozentigen Transmission  $r$ . Die Finesse ist dann:

$$F = 155,5.$$

Ein Signal mit der Breite von 0,64% des freien Spektralbereiches kann hiermit also noch aufgelöst werden. Der Verlauf der Finesse als Funktion des Reflexionsvermögens der Spiegel ist in Abb.23 dargestellt. Eine Finesse von mehr als 100 ist nur bei sehr geringen Verlusten  $v$  zu erreichen, da der Maximalwert von  $r$  im-

mer kleiner als  $1-r$  sein muß. Gleichzeitig nimmt aber die Peak-Transmission drastisch ab (siehe Abb.21).



*Abb.23: Finesse als Funktion des Reflexionsvermögens der Spiegel*

## Empfindlichkeit

Bei manchen Anwendungen des Fabry-Perots, so zum Beispiel bei der Stabilisierung von Lasern, ist die Änderung der Intensität bei Frequenzänderungen wichtig. Wir suchen dazu zunächst einmal den Punkt auf der Flanke der Resonanz, bei der sich die Intensität maximal ändert. Wir behandeln wieder ausschließlich die Transmission, für die reflektierte Strahlung geht die Rechnung jedoch ganz ähnlich. Wir suchen den steilsten Punkt in der Transmissionkurve:

$$I_T(k) = I_0 * \frac{t^2}{(1-r)^2 + 4*r*\sin^2[k*d]}$$

Dazu bilden wir die zweite Ableitung von  $I_T(k)$  und setzen sie gleich Null, woraus sich die folgende Bestimmungsgleichung für den Wellenvektor  $k_S$ , für den die Intensitätskurve maximale Steilheit besitzt, ergibt:

$$\sin^4(k_S*d) - 2 * (3/4 + u) * \sin^2(k_S*d) + u = 0$$

mit 
$$u = \frac{(1-r)^2}{8*r}$$

und der Lösung:

$$\sin^2(k_S*d) = u + 3/4 - \sqrt{[(u+3/4)^2 - u]}$$

Für unser schon vorher verwendetes Beispiel mit  $r = 0,98$  haben wir für  $u$ :

$$u = 5,1*10^{-5}.$$

Bei so kleinen Werten können wir die Lösung der quadratischen Gleichung annähern:

$$\sin^2(k_S*d) \approx 2/3 * u$$

Eingesetzt in die Transmissionsgleichung haben wir dann:

$$I_T(k_S) \approx 3/4 * I_0 * \frac{t^2}{(1-r)^2} = 0,75 * I_{Max} \quad [101]$$

Überraschenderweise ist also (bei höheren Finesse-Werten) die Flankensteilheit der Airy-Funktion in 75% Höhe des Spitzenwertes maximal, und nicht in halber Höhe, wie man es zum Beispiel von der Lorentz-Kurve her kennt. Wir haben als Steilheit an dieser Stelle:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dv} \Big|_{Max} &\approx \frac{\pi}{FSR} * 3/8 * \sqrt{[3/(2*u)-1]} * I_{Max} \approx \\ &\approx 202 * \frac{I_T^{Max}}{FSR} \quad \text{für } r = 0,98. \end{aligned}$$

Das bedeutet zum Beispiel für einen freien Spektralbereich von 300 MHz, daß sich die transmittierte Intensität um etwa 1% der Maximalintensität ändert, wenn die Frequenz um lediglich 15 kHz verstimmt wird. Dieser Wert vergrößert sich auf ca. 38 kHz, wenn die Reflektivität der Spiegel auf 95% erniedrigt wird, wobei die Finesse sich auf den Wert  $F = 64,5$  reduziert. Man sieht, daß die Reflektivität der Spiegel ganz entscheidend die Empfindlichkeit beeinflusst.

## Resonanzüberhöhung

Interessant ist noch, welche Intensität im Innern des Resonators erreicht wird. Betrachten wir nochmals die transmittierte Intensität. Bevor dieses Feld den Resonator verläßt, muß die Intensität den  $1/t$ -fachen Wert besitzen, damit die oben angegebene Amplitude auch hinter dem Spiegel nachgewiesen werden kann. Wir haben also für die Intensität im Inneren des Fabry-Perots:

$$I_T(k_0) = I_T^{Max}/t = I_0 * \frac{t}{(1-r)^2} \quad [102]$$

Wir erhalten im Falle von Resonanz eine starke Überhöhung der Intensität innerhalb des Resonators. Für unser obiges Beispiel ( $r = 98\%$ ,  $v = 1\%$ ,  $t = 1\%$ ) ist sie immerhin 25-fach, wenn man sie mit der auf das Fabry-Perot einfallenden Intensität vergleicht.

Der Resonator wirkt also wie ein Speicher für die Strahlung, allerdings muß er dazu exakt auf Resonanz abgestimmt werden. Diese Resonanzüberhöhung ist ein wichtiges Werkzeug zur Frequenzvervielfachung von Laserstrahlung, da z.B. der Wirkungsgrad bei der Frequenzverdopplung proportional zum Quadrat der auf den Verdopplerkristall einfallenden Intensität ist. Ein Faktor 25 bringt dann immerhin einen Gewinn der verdoppelten Intensität vom 625-fachen gegenüber einer Anordnung außerhalb eines Resonators. Man sieht, daß eine optimale Ankopplung an einen Resonator möglichst hoher Finesse in diesen Fällen besonders lohnend ist. Aber auch für die Sub-Doppler-Spektroskopie oder die Zwei-Photonen-Spektroskopie, bei denen es auf hohe Intensitäten ankommen kann, ist diese Resonanzüberhöhung durchaus von Interesse.

## Cavity-Matching

Die bisherige Behandlung berücksichtigte nicht, daß sowohl das eingestrahelte Laserfeld als auch der Fabry-Perot-Resonator ihre eigenen Gauß'schen Parameter bzw. Strahltaillen  $w_{01}$  und  $w_{02}$  besitzen. Die Ankopplung ist also noch weitgehend davon abhängig, wie sich die Gauß'schen Feldverteilungen überlappen. Dazu können wir uns die Orthogonalitätseigenschaften der Gauß'schen Lösungen, die wir zuvor abgeleitet haben, zunutze machen. Um aber eine sinnvolle Ankopplung überhaupt zu ermöglichen, sind die Gauß'schen Parameter durch eine zwischengeschaltete Optik möglichst aufeinander anzupassen. Nehmen wir an, wir haben die Laser-Taille  $w_{01}$  und die Strahltaile von unserem Fabry-Perot  $w_{02}$  vorgegeben, dann ist die Aufgabe, daß die Optik die Taille  $w_{01}$  in die Taille  $w_{02}$  umwandeln muß, und dies an

genau dem Ort, an dem das Fabry-Perot seine engste Waist besitzt. Wir haben also eine Matrix der Optik

$$\mathbf{T}(a,b) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta b/f & f*[1-\delta a*\delta b/f^2] \\ -1/f & -\delta a/f \end{bmatrix}$$

mit zwei gleichzeitig vorgegebenen Taillen. Früher hatten wir gefunden (Gl.[72]), daß gelten muß:

$$\delta b = \frac{z_{R2}}{z_{R1}} * \delta a \quad \text{mit} \quad z_{Ri} = k/2 * w_{0i}^2, \quad i = 1,2$$

Außerdem hatten wir dort:

$$\delta a * \delta b = f^2 - z_{R1} * z_{R2}$$

Sind die Parameter der Optik und die Rayleigh-Längen vorgegeben, dann bestimmt sich aus diesen beiden Gleichungen der Abstand der Taillen von den Fokuspunkten der Optik mit:

$$\delta a = \pm [z_{R1}/z_{R2} * (f^2 - z_{R1} * z_{R2})]^{1/2}$$

$$\delta b = \pm [z_{R2}/z_{R1} * (f^2 - z_{R1} * z_{R2})]^{1/2}$$

Die Vorzeichen müssen beide gleichzeitig entweder positiv oder negativ sein. Man beachte, daß bei einer Eingangstaille innerhalb der Eingangsbrennweite die Bildtaille ebenfalls innerhalb der Ausgangsbrennweite liegt! Außerdem muß die Nebenbedingung

$$f \geq \sqrt{z_{R1} * z_{R2}}$$

erfüllt sein, sonst ist Cavity-Matching überhaupt nicht möglich.

Der Abstand zwischen den Waists ist damit ebenfalls festgelegt, denn wenn wir die für die Optik bereits festgelegte Distanz zwischen den beiden Fokuspunkten  $a_f$  und  $b_f$  der Optik mit  $\delta f$  bezeichnen, dann ist die volle Distanz  $\delta$  zwischen den beiden Taillen:

$$\begin{aligned} \delta &= \delta f + \delta a + \delta b. & [103] \\ &= \delta f + (\sqrt{z_{R1}/z_{R2}} + \sqrt{z_{R2}/z_{R1}}) * \sqrt{(f^2 - z_{R1} * z_{R2})} \end{aligned}$$

Umgekehrt kann natürlich auch der Abstand  $\delta$  vorgegeben sein. Dann ist die dazu passende Brennweite  $f$  der Optik zu bestimmen und nicht mehr frei wählbar. Dies ist wahrscheinlich der häufigere Ausgangspunkt beim Cavity-Matching.

Durch diese spezielle Abbildung wird sichergestellt, daß die beiden Gauß'schen Parameter  $q$  und  $q'$  zueinander passen. Bleibt noch die Frage, wie stark koppeln die verschiedenen transversalen Moden des Fabry-Perots an das Laserfeld an. Es ist klar, daß die Grundmode des Lasers mit  $s=0$  und  $m=0$  bei Erfüllung der Abbildungsbedingung auch nur an die Grundmode des Fabry-Perots ankoppeln kann, sofern beide Gauß'schen Strahlen auf der gleichen Achse eingerichtet sind. Dies gilt natürlich dann auch für alle höheren transversalen Moden, da deren Gauß'schen Parameter identisch sind. Das hat selbstverständlich die sehr erwünschte Folge, daß immer nur eine bestimmte Mode des Fabry-Perots mit der als "rein" angenommenen Mode des Laser-Felds angeregt werden kann. Alle übrigen transversalen Moden werden überhaupt nicht ankoppeln. Das bedeutet aber, daß es auch nur eine (periodische) Frequenz gibt, bei der das Fabry-Perot resonant sein kann, wo also optimale Ankopplung stattfindet. Die Resonanzkurve entspricht dann der Airy-Funktion, die wir oben hergeleitet haben.

Anders sind die Verhältnisse, wenn kein optimales "Cavity-Matching" stattfindet, wenn also z.B. die Transformation der Waists nicht exakt stimmt. Dann können verschiedene Moden des Fabry-Perots angeregt werden, deren Eigenfrequenzen i.a. auch verschieden sind. Wir haben mit einer Summe von unterschiedlich intensiven Airy-Funktionen, deren Mittenfrequenzen auch noch verschieden sind, zu rechnen. Dementsprechend wird sich die Form der Resonanzkurve verändern. Insbesondere wird sich die Resonanz verbreitern, die Form der Resonanzkurve kann sogar unsymmetrisch werden. Manchmal ergibt sich so eine recht drastische Verringerung des

Auflösungsvermögens, so daß der Wert eines Fabry-Perots als spektrales Analyse-Instrument sehr beeinträchtigt wird. Diese Problematik kann man sehr gut beobachten, wenn man ein Analyse-Fabry-Perot zur Untersuchung der Emission eines Lasers verwendet. Bei unzureichender Ankopplung wird immer eine zuweilen auch unsymmetrische Form des Ausgangssignals entstehen. Zur Maximierung des Auflösungsvermögens muß man auf jeden Fall auf eine sorgfältige Ankopplung achten.

## Ankoppelleffizienz

Die Stärke der Ankopplung der verschiedenen transversalen Moden des Fabry-Perots errechnet sich aus der Superposition von Gauß'schen Strahlen. Man ist also durchaus in der Lage, die oben so langwierig hergeleitete Theorie der Gauß'schen Strahlen auch ganz konkret zu nutzen. Die Details solcher Rechnungen sind heutzutage mit den zur Verfügung stehenden Rechnern leicht durchzuführen, wir wollen deshalb darauf hier nur kurz eingehen. Die Grundlage ist Gl.[65], wie sie weiter oben angegeben ist. Wir nehmen einmal der Einfachheit halber an, daß wir einen Grundmoden-Laserstrahl an die Grundmode eines Fabry-Perots ankoppeln wollen. Wir haben für den dazu gehörigen Gauß'schen Strahl des Lasers

$$F_L(r, \phi, z) = \frac{\sqrt{[2/\pi]}}{w(z)} * \text{Exp}\{i*[k*(z + \frac{r^2}{2*R(z)}) - \psi_L(z)]\} * \text{Exp}\{-\frac{r^2}{w^2(z)}\}$$

und des Resonators

$$F_{FP}^{(0,0)}(r, \phi, z') = \frac{\sqrt{[2/\pi]}}{w'(z')} * \text{Exp}\{i*[k*(z' + \frac{r^2}{2*R'(z')}) - \psi_{FP}(z')]\} - \frac{r^2}{w'^2(z')}$$

mit  $z' = z - \delta$ ,

wobei  $\delta$  den Abstand zwischen den Positionen der beiden Taillen  $w_0$  und  $w_0'$  angibt. Wir betrachten das Fabry-Perot-Feld an der Stelle seiner minimalen Waist ( $z'=0$ ,  $\psi_{FP}(z')=0$ ) und versuchen dort die Ankopplung zu berechnen. Dafür gilt:

$$F_L(r, \phi, \delta) = a_0 * F_{FP}^{(0,0)}(r, \phi, 0) + \dots$$

mit

$$a_0 = \int d\phi \int r*dr * F_L(r, \phi, \delta) * F_{FP}^{(0,0)*}(r, \phi, 0) =$$

$$= \frac{4}{w(\delta)*w_0'} * e^{i*\beta} * \int_0^\infty r*dr * \text{Exp}\{-r^2*[a-i*b]\}$$

mit  $\beta = k*\delta - \psi_L(\delta)$ ,

$$a = 1/w^2(\delta) + 1/w_0'^2,$$

$$b = k/2 * 1/R(\delta),$$

$$w(\delta) = w_0 * [1 + (\delta/z_R)^2]^{1/2},$$

$$R(\delta) = \delta + z_R^2/\delta \quad \text{und}$$

$$z_R = k/2 * w_0^2$$

Das Integral läßt sich lösen mit:

$$a_0 = \frac{2 * w(\delta)/w_0' * e^{i*\beta}}{1 + w^2(\delta)/w_0'^2 - i * \delta/z_R}$$

Für die Ankopplung der Intensität ist nur das Betragsquadrat von  $a_0$  von Interesse, während die Phase unwichtig ist. Wir finden dann:

$$|a_0|^2 = \frac{4 \cdot w^2(\delta) / w_0'^2}{\{1 + w^2(\delta) / w_0'^2\}^2 + [\delta / z_R]^2} \quad [104]$$

Die Waist  $w(\delta)$  am Ort der neuen Taille  $w_0'$  entscheidet über die Effizienz der Ankopplung. Die Ankoppeleffizienz wird maximal, wenn die beiden Strahltaillen exakt am gleichen Ort liegen ( $\delta=0$ ). Wir haben dann:

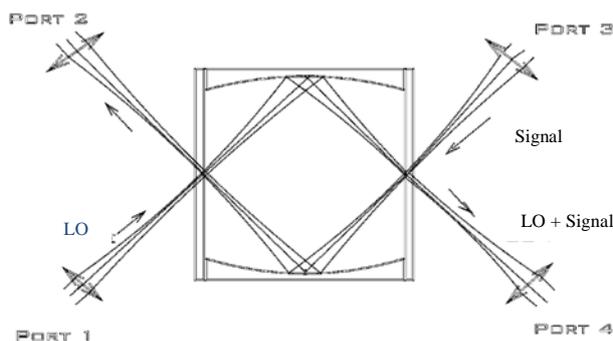
$$|a_0|^2 = \frac{4}{\{w_0/w_0' + w_0'/w_0\}^2}$$

Der Ankoppelkoeffizient  $|a_0|^2$  kann also nur dann = 1 werden, wenn außerdem die beiden Strahltaillen identisch sind. Wie man aus Formel [104] sieht, hat man mit der Positionierung der Eingangstaille einen Spielraum, der etwa der Rayleigh-Länge des Eingangsstrahls entspricht ( $\delta = z_R$ ), da sich die die Waist dort maximal um den Faktor  $\sqrt{2}$  ändert ( $|a_0|^2$  erreicht dann immer noch 80% des maximalen Wertes). Ebenso kann die Eingangswaist um etwa eine Taillegröße variieren, bevor die Ankopplung deutlich unter 50% Prozent sinkt ( $|a_0|^2$  wird dann 64% unter der Voraussetzung  $\delta = 0$ ). Man muß natürlich außerdem berücksichtigen, daß die Ankopplung noch durch die Spiegeltransmission mit beeinflußt wird, wie wir zuvor bei der Herleitung der Airy-Funktion gesehen hatten.

Wir wollen nun noch untersuchen, welcher Resonator-Typ bei der Ankopplung besonders geeignet erscheint. Dazu ist die Verschiebung der Resonanzfrequenzen in den verschiedenen transversalen Moden ausschlaggebend. Innerhalb des Stabilitätsbereichs gibt es nur einen Resonator, dessen transversale Moden weitgehend entartet sind, und das ist der konfokale Resonator. Wie oben gezeigt, sind die Resonanzfrequenzen dieses Resonators

$$\nu_{p,s,m} = \frac{c}{2 \cdot d} * \{ p + (2 \cdot s + m + 1) \psi_R / 2 \}$$

da der Phasenwinkel  $\psi_R = \pi/2$  wird. Der minimale Abstand der Resonanzen ist also gleich  $c/(4 \cdot d)$ , also halb so groß wie der longitudinale Modenabstand. Dies trifft aber nur zu, wenn  $m$  sich um 1 ändert, wenn also Moden angeregt werden, deren Zahl von azimuthalen Knotenlinien sich um 1 ändert. Man kann dies leicht vermeiden, indem man sich bei der Ankopplung darum bemüht, das Fabry-Perot möglichst exakt auf der optischen Achse anzukoppeln. Das ist normalerweise nicht besonders schwierig, vorausgesetzt, der Laserstrahl selbst ist vollkommen rotationssymmetrisch. Das sollte bei der transversalen Grundmode sicherlich der Fall sein. Die Konsequenz ist, daß jede Komponente des Feldes gleichzeitig mit allen verschiedenen, erlaubten Moden des Fabry-Perots gleichzeitig koppelt, daß also keinerlei Koppelverluste auftreten können. Das ist besonders wichtig, wenn es auf möglichst effizienten Nachweis der einfallenden Laserstrahlung ankommt. Dies trifft dann auf jede beliebige, eingekoppelte (rotationssymmetrische) Feldverteilung zu, so daß im Prinzip gar kein Cavity-Matching mehr notwendig wäre. Allerdings gibt es immer noch Abbildungsfehler in der Optik, so daß diese Behauptung nicht so ganz zutreffend ist. In Konsequenz sind Verbreiterungen der Resonanz unter diesen Umständen dennoch in geringem Umfang zu erwarten.



**Abb.24:** Konfokaler Ringresonator zur möglichst verlustarmen Überlagerung von Signal und Lokaloszillator in einem Heterodynsystem. Die Brennpunkte der beiden parabolischen Off-Axis-Spiegel liegen genau auf den beiden Strahlteilern.

In der Entartung liegt der eigentliche Grund, warum konfokale Resonatoren so sehr beliebt sind. Diese Eigenschaft hat kein anderer, stabiler Resonator, wenn

man, wie oben besprochen, den planparallelen und den konzentrischen Resonator ausklammert. Diese Eigenschaft ist auch von Bedeutung, wenn Resonatoren als sogenannte Diplexer eingesetzt werden. Dazu wird ein Ringresonator verwendet, der dann Resonanzen im sogenannten Wanderwellenbetrieb zeigt (siehe Abb.24). Von der optischen Behandlung unterscheidet er sich nicht von den oben vorgestellten linearen Resonatoren. Die entsprechende Abbildungsmatrix ist leicht zu finden. Wichtig ist, daß mit diesem Resonator zwei Strahlen unterschiedlicher Frequenz optimal aufeinander abgebildet werden können, wenn ein Strahl in Resonanz in Transmission und der zweite Strahl in Antiresonanz in Reflexion angekoppelt wird. Diese Überlagerung zweier Strahlen ist zum Beispiel in Heterodyn-Empfangssystemen nützlich, wo es darauf ankommt, daß zwei Strahlen, ein Signal-Strahl und ein sogenannter "Lokal-Oszillator-Strahl", exakt überlappend und möglichst ohne große Verluste auf einen Mischer fokussiert werden müssen (siehe dazu Abb.21). Die obigen Überlegungen zeigen, daß dies unter der Voraussetzung möglichst geringer Spiegelverluste ohne weiteres möglich ist. Wichtige Voraussetzung ist ein möglichst optimales Cavity-Matching, was sich eben am einfachsten mit einem konfokalen Resonator verwirklichen läßt. Ein weiterer Aspekt dieser Anordnung ist, daß das Signal optimal reflektiert neben der Lokaloszillatorfrequenz reflektiert wird, wodurch keine Ankoppelverluste im gesamten Zwischenfrequenzbereich entstehen, wie sie z.B. bei einer Martin-Pupplet-Anordnung typisch sind.

Bei der Diskussion der Ankoppeleffizienz sollte hier noch auf einen scheinbaren Widerspruch hingewiesen werden, der bei der Behandlung des konfokalen Fabry-Perots häufig auftritt. Wir haben bisher untersucht, wie eine bestimmte Mode des Resonators an eine einfallende Feldverteilung ankoppelt. Dafür hatten wir weiter oben auch die Effekte der Spiegelreflexion und der Spiegelverluste untersucht. Häufig jedoch wird beim konfokalen Resonator eine rein geometrische Betrachtungsweise abgehandelt, der einem Strahlengang, den wir schon in Abb.11 vorgestellt hatten, entspricht. In diesem Fall müssen wir berücksichtigen, daß wir effektiv 4 Reflexionen statt nur 2 an den Spiegeln des Resonators haben, bevor der nächste Teilstrahl wieder mit seinem Vorgänger interferierend überlagern kann. Dementsprechend wird in der Airy-Funktion statt des einfachen Reflexionskoeffizienten  $r$  dessen Quadrat  $r^2$  eingesetzt werden müssen. Dies kann aber nur dann richtig sein, wenn von den beiden ausgekoppelten Strahlen lediglich einer mit dem Detektor nachgewiesen wird, während der andere verlorengelht. Wird das Licht beider Teilstrahlen auf dem Detektor so überlagert, daß sie miteinander interferieren können, dann stimmt dieser Ansatz nicht mehr, und es muß von der einfachen Airy-Funktion und der eben behandelten Ankoppeleffizienz ausgegangen werden. Man sieht, daß die Behandlung der Ankopplung nicht immer einfach zu durchzuführen ist. Die Fallunterscheidung ist je nach experimentellen Bedingungen zu treffen.

## Transmission bei Kopplung von 2 Resonatoren

Wir betrachten noch einmal den Fall zweier gekoppelter Resonatoren. Der Einfachheit halber untersuchen wir eine Kombination von drei Spiegeln mit den jeweiligen Reflexionskoeffizienten  $r_i$  und den Transmissionskoeffizienten  $t_i$ . Der Abstand zwischen Spiegel 1 und 2 sei  $d_{12}$  und der zwischen Spiegel 2 und 3  $d_{23}$ . Die Kombination von Spiegel 2 und 3 können wir zusammenfassen als wäre es ein Spiegel mit einem Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten  $R_{23}$  und  $T_{23}$ . Diese müssen wir nun berechnen aus den Resonanzbedingungen wie oben mit:

$$\sqrt{R_{23}} = \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} \cdot \frac{t_2 \cdot e^{2 \cdot i \cdot k \cdot d_{23}}}{1 + \sqrt{[r_2 \cdot r_3]} \cdot e^{2 \cdot i \cdot k \cdot d_{23}}}$$

$$\sqrt{T_{23}} = \frac{\sqrt{[t_2 \cdot t_3]} \cdot e^{i \cdot k \cdot d_{23}}}{1 + \sqrt{[r_2 \cdot r_3]} \cdot e^{2 \cdot i \cdot k \cdot d_{23}}}$$

Diese neuen Transmissions- bzw. Reflexionskoeffizienten setzen wir nun in die obigen Gleichungen mit einem aus nur 2 Spiegeln bestehenden Resonator ein, wobei

$R_{23}$  die Reflektivität  $r_2$  und  $T_{23}$  die Transmission  $t_2$  des zweiten Spiegels ersetzt. Nur so können wir erreichen, daß die Resonanzbedingungen für die 3 entstehenden Resonatoren 1-2, 2-3 und 1-3 in die Berechnung eingehen. Die Problematik der Phase bei Reflexion an den Spiegeln führt hier zu Schwierigkeiten. Wenn z.B. bei Reflexion am Spiegel 2 vom Spiegel 1 kommend kein Phasensprung auftritt, dann muß bei Reflexion vom Spiegel 3 kommend am Spiegel 2 ein Phasensprung berücksichtigt werden (Phasensprung bei Reflexion am optisch dichteren Medium  $\leftrightarrow$  Fresnel-Formeln). Deshalb sind hier die Vorzeichen anders gesetzt als oben im Falle eines einfachen Resonators. Wir erhalten dann für einen Weg startend unmittelbar vor Spiegel 1 für die Transmission aus Spiegel 3:

$$E_T = E_0 \cdot \frac{\sqrt{[t_1 \cdot T_{23}] \cdot e^{i \cdot k \cdot d_{12}}}}{1 - \sqrt{[r_1 \cdot R_{23}] \cdot e^{2 \cdot i \cdot k \cdot d_{12}}}} =$$

$$= E_0 \cdot \frac{\sqrt{[t_1 \cdot t_2 \cdot t_3] \cdot e^{i \cdot k \cdot (d_{12} + d_{23})}}}{1 - \sqrt{[r_1 \cdot r_2] \cdot e^{2 \cdot i \cdot k \cdot d_{12}}} + \sqrt{[r_2 \cdot r_3] \cdot e^{2 \cdot i \cdot k \cdot d_{23}}} - (r_2 + t_2) \cdot \sqrt{[r_1 \cdot r_3] \cdot e^{2 \cdot i \cdot k \cdot (d_{12} + d_{23})}}}$$

Resonanz erhalten wir, wenn  $k \cdot d_{12}$  und  $k \cdot d_{23}$  gleichzeitig ein ganzes Vielfaches von  $\pi$  sind. Dann ist auch  $k \cdot (d_{12} + d_{23})$  ein Vielfaches von  $\pi$ . Die transmittierte Intensität ist dann für den verlustlosen Fall mit  $r_3 = r_1$  und  $t_i + r_i = 1$  ( $i=1,2,3$ ) gleich  $I_T = E_T^2 = E_0^2 \cdot t_2 = I_0 \cdot t_2$ . Bei gekoppelten Resonatoren gilt also nicht, daß die insgesamt transmittierte Intensität 100% erreichen kann. Es ist klar, daß für ein optimales Zusammenwirken aller Teilresonatoren alle Teilresonatoren gleichzeitig resonant sein müssen. Ähnlich kann man natürlich auch für das Zusammenwirken von mehr als drei Spiegeln vorgehen, die Sache wird dann allerdings immer komplizierter. Bei dem oben besprochenen Cavity-Matching hat man es normalerweise mit 4 Spiegeln zu tun, also im Prinzip mit 6 Teilresonatoren! Demzufolge spielt dann auch der Abstand zwischen dem Auskoppelspiegel des ersten Resonators und dem Einkoppelspiegel des zweiten Resonators eine gewisse Rolle. Die Phase muß eben stimmen! Salopp gesprochen: An den Spiegeloberflächen sollte man immer einen Knoten der stehenden Welle erwarten.

## Absorption im Resonator

Es ist eine häufig angewandte Technik, die Empfindlichkeit bei der Messung von atomaren oder molekularen Absorptionen dadurch zu erhöhen, indem man das absorbierende Gas in einen Resonator mit möglichst hoher Güte einbringt. In diesem Fall wird die normalerweise frequenzabhängige Absorption zu einer Reduzierung der Güte im Falle der Resonanz führen, so daß dies sich auf die vom Resonator transmittierte Intensität auswirkt. Wir betrachten deshalb einmal eine Dopplerverbreiterte Absorption, deren Absorptionskoeffizient wir beschreiben mit:

$$I(k) = I_0 \cdot e^{-\alpha \cdot z}$$

$$\text{Mit } \alpha = \alpha(k) = \alpha_0 \cdot \text{Exp}\left\{ - \frac{(k - k_0)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \quad [105]$$

$$\text{und } \sigma^2 = D^2 / (8 \cdot \ln(2)) = k_B \cdot T / m \cdot k_0 / c$$

$k_0$  ist die Ruhfrequenz (gerechnet in Wellenzahlen) der Absorptionslinie,  $m$  ist die Masse der Moleküle in atomaren Masseneinheiten, und  $D$  ist die volle Halbwertsbreite der Dopplerverteilung. Die maximale Absorption haben wir bei  $k = k_0$ , und sie ist gleich  $\alpha_0$ . Die Amplitude wird beim Durchgang durch den Resonator geschwächt wie:

$$E(k) = E_0 \cdot e^{-\alpha/2 \cdot z}$$

Diese Abschwächung müssen wir als zusätzlichen Verlust zu den Spiegelverlusten in Gl.[92] (bei Annahme gleicher Spiegel) mit einbauen, und wir erhalten:

$$E_T = E_0 \cdot \frac{t \cdot e^{(i \cdot k - \alpha/2) \cdot d}}{1 - r \cdot e^{2 \cdot (i \cdot k - \alpha/2) \cdot d}}, \quad [106]$$

wobei wir z gleich der Länge d des Resonators gesetzt haben. Wir interessieren uns im Augenblick nur für die maximale, transmittierte Intensität, wofür wir finden:

$$I_T^{Max} = I_0 \cdot \frac{t^2 \cdot e^{-\alpha \cdot d}}{(1 - r \cdot e^{-\alpha \cdot d})^2}$$

Die Empfindlichkeit bei Änderung der Absorption  $\alpha$  ist dann für sehr schwache Absorptionen ( $\alpha \cdot d \ll 1$ )

$$\frac{1}{I_T^{Max}} \cdot \frac{d(I_T^{Max})}{d(\alpha \cdot d)} \Big|_{\alpha=0} = - \frac{1+r}{1-r} \quad [107]$$

Die Empfindlichkeit wird also bei einer Reflexion von 98% an den Spiegeln gegenüber dem einfachen Durchgang um den Faktor 99 erhöht. Das ist sicherlich ein erheblicher Gewinn an Empfindlichkeit. Allerdings muß hierzu erwähnt werden, daß die Absorptionen üblicherweise durch Abstimmen der Laserfrequenz  $k$  detektiert werden. Da wir davon ausgegangen sind, daß wir immer im Maximum der Transmission des Fabry-Perots messen, muß dabei die Resonanzfrequenz des Resonators sehr präzise mit abgestimmt werden. Dies kann bei der geforderten hohen Genauigkeit durchaus zum Problem werden. Beeinträchtigungen des Signal- zu Rauschverhältnisses sind deshalb keine Seltenheit.

Die obigen Gleichungen gelten natürlich auch, wenn man es mit "negativer" Absorption zu tun hat, also im Falle von Verstärkung in Lasern. Der Ausdruck für die maximale Intensität divergiert, wenn

$$r \cdot e^{-\alpha \cdot d} = 1$$

wird (bei Verstärkung ist  $\alpha$  negativ!). Das ist physikalisch natürlich nicht gerade eine sinnvolle Aussage, jedoch haben wir hier die prinzipiell nicht-lineare Abhängigkeit der Verstärkung von der Intensität unberücksichtigt gelassen. Das ist Gegenstand eines anderen Themas und würde hier zu weit führen.

In der vorangegangenen Diskussion haben wir uns das Leben etwas zu einfach gemacht. Es ist bekannt, daß zu jeder Absorption auch Dispersion gehört, die sich über die Kramers-Kronig-Relationen relativ einfach berechnen läßt. Wenn wir davon ausgehen, daß wir es mit einer Doppler-verbreiterten Absorptionslinie zu tun haben, dann ist unter der Annahme einer gegenüber der Doppler-Breite vernachlässigbaren, natürlichen Linienbreite die frequenzabhängige Brechungsindex-Variation leicht zu berechnen. Sei die natürliche Linienbreite des Übergangs sehr klein gegenüber der Doppler-Breite, dann finden wir für nicht zu große Verstimmung der Beobachtungsfrequenz von der Linienmitte, also wenn der Abstand zur Linienmitte nur wenige Linienbreiten beträgt:

$$n(k) = n_0 - 2 \cdot \alpha_0 / k \cdot \frac{k - k_0}{\sqrt{[2 \cdot \pi \cdot \sigma^2]}} \cdot \text{Exp} \left\{ - \frac{(k - k_0)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \quad [107]$$

(Diese Formel gilt nur für relativ schwache Absorptionen, bei der der Betrag der dielektrischen Suszeptibilität klein gegen 1 ist. Außerdem wird für große Verstimmung von der Linienmitte die Linienform der Absorptionslinien nicht mehr durch ein Gauß-förmiges Doppler-Profil sondern durch mehr Lorentz-förmige Flügel der Linien bestimmt (siehe dazu  $\leftrightarrow$  Galatry-Profil). Dieses ebenfalls frequenzabhängige Verhalten des Brechungsindexes beeinflusst die Lage der Resonanzen des Resonators, da nun auch die optische Weglänge im Resonator frequenzabhängig wird. Wir setzen wieder ein und erhalten:

$$E_T = E_0 \cdot \frac{t \cdot e^{(i \cdot k \cdot n - \alpha \cdot d/2) \cdot d}}{1 - r \cdot e^{2 \cdot (i \cdot k \cdot n - \alpha \cdot d/2) \cdot d}}. \quad [108]$$

Für die Intensität haben wir dann:

$$I_T = I_0 * \frac{t^2 * e^{-\alpha \cdot d}}{(1 - r \cdot e^{-\alpha \cdot d})^2 + 4 \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot d} \cdot \sin^2(k \cdot d \cdot n(k))} \quad [109]$$

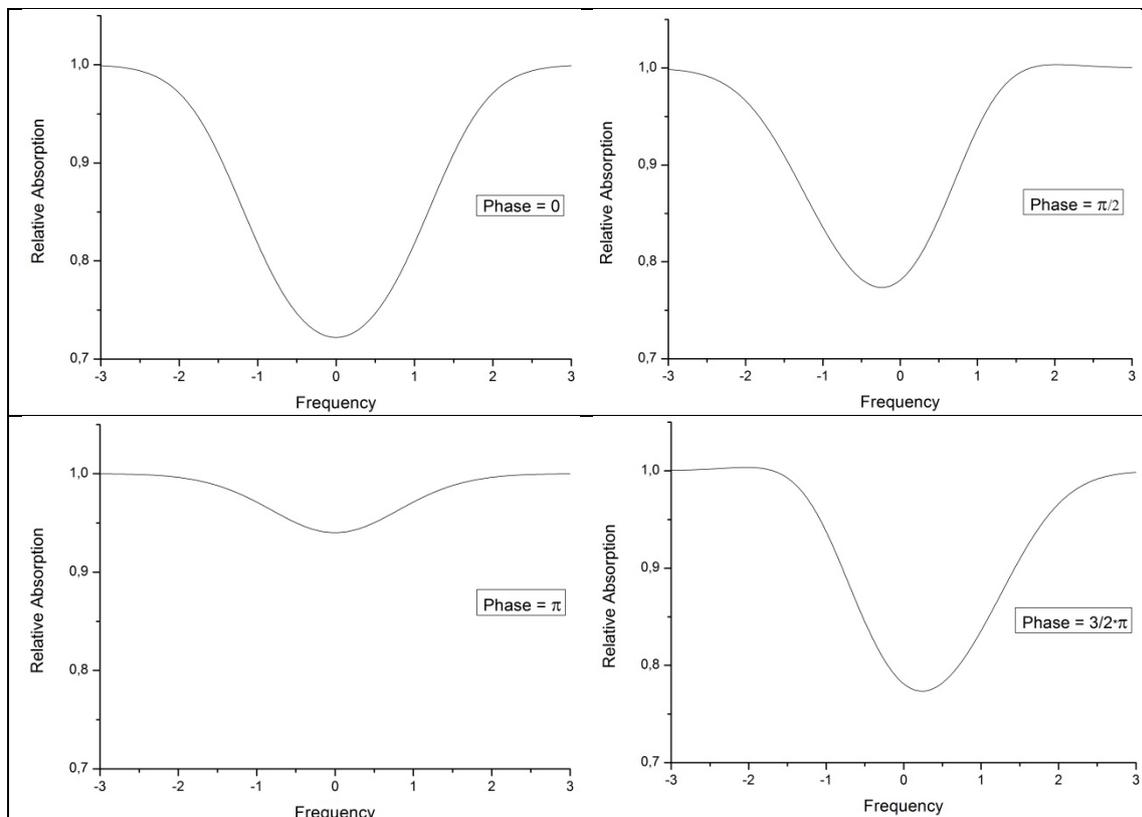
Man sieht, daß zusätzlich zum Einfluß der Absorption auch noch eine Veränderung der Resonanzfrequenz auftritt. Resonanz tritt ein, wenn

$$k \cdot d \cdot n(k) = m \cdot \pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \text{ ist.}$$

Je nachdem, an welcher Stelle der Absorption wir uns befinden, fällt die Verschiebung unterschiedlich aus. Deshalb ist es außerordentlich schwierig, genaue Positionen von Absorptionslinien innerhalb eines Resonators zu vermessen, da die Wechselwirkung zwischen Resonator und Dispersion nur schwer zu quantifizieren ist. Ein bekanntes Beispiel ist die Auswirkung der anomalen Dispersion bei Gas-Lasern. Dort führt sie zu sogenannten "Mode-Pulling" Effekten, die eine Verschiebung der Eigenfrequenzen des Laser-Resonators verursachen.

Dieser Effekt tritt sogar dann bereits auf, wenn man es mit unerwünschten Stehwellen in einem Laser- oder Mikrowellen-Spektrometer zu tun hat. Diese treten fast immer durch unvermeidliche Reflexionen an Fenstern, Detektoren etc. auf. Wir können diese Stehwellen als sehr schwache Fabry-Perot-Resonanzen behandeln, und somit mit Gl.[109] unsere Untersuchung des Effekts starten. Wir gehen davon aus, daß der freie Spektralbereich, oder die Periode der Stehwellenstruktur, groß gegenüber der Linien-Breite unserer Absorptionslinie ist. Wir können nun verschiedene Fälle für die Lage der Resonanzlinie unterscheiden:

1. Sie liegt genau auf dem Maximum,
2. sie liegt auf der fallenden Flanke oder
3. sie liegt genau auf dem Minimum,
4. sie liegt auf der steigenden Flanke der Stehwelle.



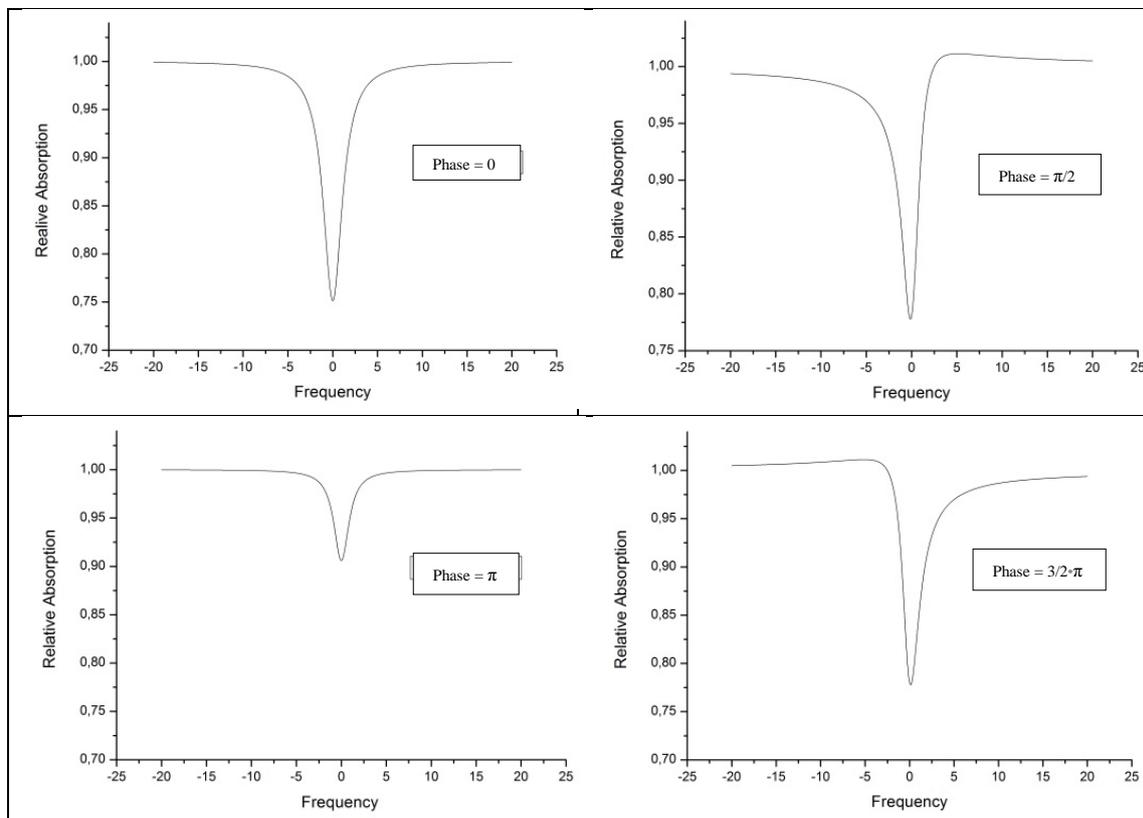
**Abb.24:** Linienverschiebung und -veränderung durch Stehwellen

In Abb.24 sind die vier Fälle dargestellt. Dabei sind als Parameter verwendet:

$$\text{Reflexionskoeffizient} = 0,3 \quad \text{Absorptionskoeffizient} = 0,5$$

Abgesehen von dem trivialen Einfluß der frequenzabhängigen Verzerrung des Intensitätsverlaufs verschiebt sich das Maximum der Linie noch zusätzlich durch den Einfluß der anomalen Dispersion. Dargestellt ist die transmittierte Intensität dividiert durch die Intensität ohne Anwesenheit der Absorption, letzteres um den Einfluß der Stehwelle auf die nicht absorbierte Intensität zu beseitigen. Deutlich ist die Veränderung der Linienstärke als auch die Veränderung der Linienform zu sehen. Außerdem ist in unserem Fall das Linienmaximum um 12% der Linienbreite verschoben, wenn auf der fallenden oder steigenden Flanke der Stehwelle beobachtet wird. (Die Frequenzskala ist in Einheiten der halben Linienbreite der Absorption angegeben.) Man darf außerdem nicht außer acht lassen, daß auch die Linienform nicht mehr dem einfachen Linienprofil entspricht, womit jede Art von Linienformanalyse in Frage gestellt wird. Dies ist in Abb.25 deutlich zu erkennen, wobei hier der Reflexionskoeffizient auf 0,5 erhöht ist. Solche Probleme sind besonders in der Mikrowellenspektroskopie vorhanden. Unter besonders ungünstigen Umständen kann es auch zu einer Verschiebung bis zu 20% der Halbwertsbreite der Linie kommen, so daß die genaue Bestimmung von Linienpositionen praktisch unmöglich wird, da eine nachträgliche Korrektur ausgeschlossen ist.

Aber auch bei bloßen Zweistrahlinterferometern kann dieses Problem durchaus signifikant sein. Insbesondere gilt dies für Fourier-Transform-Spektrometer, wenn Absorptionen, möglicherweise auch zufällige durch Spurengase zum Beispiel, innerhalb des Michelson-Interferometers auftreten. Die tatsächliche, optische Weglängendifferenz entspricht dann nicht mehr der von der Spiegelbewegung her angenommenen, wobei der Fehler außerdem noch frequenzabhängig ist. Deshalb sind so gewonnene Linienpositionen ebenfalls teilweise fragwürdig, wenn es um extreme Genauigkeiten geht. Es sollte hierzu noch erwähnt werden, daß auch zufällige Resonanzen, von planparallelen Platten zum Beispiel, ähnliche Effekte auslösen, da sie, wie oben gezeigt, ebenfalls Einfluß auf Amplitude und Phase nehmen.



**Abb.25:** Einfluß der Phase der Stehwelle auf die Linienform und Linienstärke

## FSR bei Dispersion im Resonator

Umgekehrt hat bei Vorhandensein von dispersiven Materialien wie Glas innerhalb eines Resonators die Variation des Brechungsindex mit der Frequenz  $k$  auch eine deutliche Veränderung des freien Spektralbereiches zur Folge. Dies ist ein gängiges Phänomen bei sogenannten "Fest-Etalons", bei denen eine Glasplatte von beiden Seiten teilverspiegelt wird. Obwohl es sich dabei um einen nicht gerade idealen Resonator handelt, werden solche, zumeist allerdings relativ dünnen Etalons in vielen Fällen gerne z.B. als Interferenzfilter verwendet. Die Airy-Funktion sagt, daß Resonanz auftritt, wenn

$$k \cdot d \cdot n(k) = m \cdot \pi \text{ ist, } m \text{ ganz,}$$

wobei  $n(k)$  der von  $k$  abhängige Brechungsindex und  $d \cdot n(k)$  der durch den Brechungsindex verlängerte, optische Weg ist. Rechnen wir den Betrag des Wellenvektors  $k$  in die Frequenz  $\nu$  um, dann gilt:

$$m = 2 \cdot d/c \cdot \nu_m \cdot n(\nu_m),$$

wobei  $d$  die Resonatorlänge,  $\nu_m$  die Frequenz, bei der Resonanz auftritt und  $m$  eine normalerweise sehr große, ganze Zahl ist. Für die nächst höhere Resonanz haben wir genauso

$$m+1 = 2 \cdot d/c \cdot \nu_{m+1} \cdot n(\nu_{m+1})$$

Der freie Spektralbereich FSR ist bestimmt durch die Differenz:

$$FSR(\nu_m) = \nu_{m+1} - \nu_m$$

Wir haben andererseits:

$$[\nu_{m+1} \cdot n(\nu_{m+1}) - \nu_m \cdot n(\nu_m)] \cdot 2d/c = (m+1) - m = 1$$

Wir können nun entwickeln und erhalten in erster Näherung:

$$1 \approx FSR(\nu_m) \cdot \left[ n(\nu_m) + \nu_m \cdot \left. \frac{dn(\nu)}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_m} \right] \cdot 2d/c$$

Daraus erhalten wir also für den nun frequenzabhängigen, freien Spektralbereich:

$$FSR(\nu) = \frac{c}{2 \cdot d \cdot [n(\nu) + \nu \cdot dn(\nu)/d\nu]}$$

oder in Wellenlängen ausgedrückt:

$$FSR(\lambda) = \frac{c}{2 \cdot d \cdot [n(\lambda) - \lambda \cdot dn(\lambda)/d\lambda]}$$

Die Änderung des Brechungsindex mit der Frequenz bzw. der Wellenlänge spielt also eine wichtige Rolle, und dabei nicht nur der Wert des Brechungsindex selbst. Zum Beispiel ist für das relativ schwach dispersive NaCl bei 10  $\mu\text{m}$  Wellenlänge  $dn/d\lambda \approx -7 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}^{-1}$  und  $n = 1,49144$ . Also verursacht die Dispersion des Natrium-Chlorid eine Veränderung des freien Spektralbereichs um fast 5% gegenüber der einfachen Berücksichtigung des Brechungsindex! Das bedeutet, daß stark dispersive Materialien innerhalb eines Resonators die Lage und die Abstände der Resonanzen gravierend verändern können. Dies ist schon nicht mehr vernachlässigbar, wenn man Glassubstrate als Strahlteiler oder zur Abstimmung des Resonators innerhalb eines Fabry-Perots einsetzt. In solchen Fällen muß der freie Spektralbereich je nach Wellenlänge jeweils neu bestimmt werden. Ein gutes Beispiel hierfür ist das "Internally Coupled Fabry-Perot Interferometer" (IcFPI), das in der Diodenlaser-Spektroskopie Anwendung findet.

Nebenbei bemerkt, die Herleitung der Formel für den freien Spektralbereich liefert das identische Resultat wie die Ableitung:

$$FSR(\nu) = \left[ \frac{dm}{d\nu} \right]^{-1}$$

Diese Definition ist nur auf infinitesimaler Basis korrekt. Sie liefert, ebenso wie unsere obige Näherung, nur dann einen guten Wert für den Abstand zwischen zwei Resonanzmaxima, wenn die zweite und auch noch höhere Ableitungen des Brechungsindex innerhalb eines FSR nichts mehr beitragen.

## Finesse und Durchmesser eines plan-parallelen Fabry-Perot

Wir hatten für ein normales, plan-paralleles Fabry-Perot zuvor bei Beobachtung des Signals unter dem Winkel  $\theta$  gefunden:

$$2 \cdot d \cdot \cos(\theta) = p \cdot \lambda$$

mit  $d$  die Dicke des FP,  $\theta$  der Einfallswinkel des Strahlenbündels,  $\lambda$  die Wellenlänge und  $p$  die Ordnung, unter der das FP betrieben wird. Daraus ergab sich:

$$\cos(\theta) = \lambda/\lambda_0 = v_0/v$$

wobei  $v_0$  die Frequenz des Lichts in Resonanz bei Einfallswinkel Null ist. Diese Formulierung enthält nicht mehr die FP-Ringe als Wiederholung eines Signals bei verschiedenen Winkeln. Diese Information steckt ausschließlich in der Definition von  $\lambda_0$ :

$$2 \cdot d = p_0 \cdot \lambda_0$$

Wobei  $p_0$  die Ordnung der Interferenzen angibt. Wenn wir obige Gleichung ableiten, erhalten wir:

$$- \sin(\theta) \cdot d\theta = - v_0/v^2 \cdot dv$$

Wegen  $\sin(\theta) = [1 - \cos^2(\theta)]^{1/2}$  haben wir dann:

$$d\theta = v_0 / [v^2 - v_0^2]^{1/2} \cdot dv/v$$

Wenn wir in der Nähe der zentralen Ordnung des FP bleiben, können wir die Frequenz  $v$  beschreiben durch den Abstand zu  $v_0$  in Einheiten  $\alpha$  des freien Spektralbereichs FSR. Den FSR geben wir an in Wellenzahlen, so daß wir haben:

$$v = v_0 + \alpha \cdot \text{FSR} \cdot c$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} v^2 - v_0^2 &= 2 \cdot v_0 \cdot \alpha \cdot \text{FSR} \cdot c \cdot [1 + \alpha \cdot \text{FSR} \cdot c / (2 \cdot v_0)] \\ &\approx 2 \cdot v_0 \cdot \alpha \cdot \text{FSR} \cdot c \end{aligned}$$

Für  $dv$  verlangen wir, daß die Auflösung den Bruchteil des FSR beträgt, wie er durch die Finesse  $F$  beschrieben wird:

$$dv = \text{FSR}/F \cdot c$$

Damit gilt:  $dv/v = \text{FSR}/F \cdot \lambda$

Das ergibt zusammen:

$$d\theta = [\text{FSR}/(2 \cdot \alpha \cdot \lambda_0)]^{1/2} \cdot \lambda/F$$

Diese Winkelauflösung darf durch die Beugung an der Apertur des FP nicht reduziert werden. Diese ist gegeben durch:

$$\partial\theta \approx \lambda/D,$$

wobei  $D$  der Durchmesser des FP ist. Wir erhalten so:

$$\partial\theta \leq d\theta$$

oder

$$\lambda/D \leq [\text{FSR}/(2 \cdot \alpha \cdot \lambda_0)]^{1/2} \cdot \lambda/F$$

Daraus folgt für  $D$ :

$$D \geq [2 \cdot \alpha \cdot \lambda_0 / \text{FSR}]^{1/2} \cdot F$$

Z.B. ergibt das bei einer Wellenlänge von  $1,55\mu\text{ nm}$ ,  $\alpha=1$ ,  $FSR = 0,5\text{ cm}^{-1}$  (= 15 GHz) und einer Finesse von 150:

$$D \geq 3,73\text{ cm!}$$

Damit erhält man 150 auflösbare Frequenz-Punkte. Man sieht jedoch, daß mit zunehmendem  $\alpha$  der benötigte Durchmesser zunimmt. Deshalb muß man bei niedriger Ordnung bleiben.

Die gleiche Forderung ergibt sich, wenn man nur den sogenannten "walk-off" analysiert. Geht man davon aus, daß man mit einem Lichtstrahl am Rand des Etalons unter dem Winkel  $\theta$  einstrahlt, dann braucht man, um eine Finesse  $F$  zu erzielen, mindestens  $F$  volle Durchläufe des Strahls im FP. Bei jedem Umlauf wird der Strahl um  $2 \cdot d \cdot \text{tg}(\theta)$  seitlich verschoben. Es muß also gelten:

$$D \geq F \cdot 2 \cdot d \cdot \text{tg}(\theta) = F \cdot \text{tg}(\theta) / FSR$$

Da aber (siehe oben)  $\text{tg}(\theta) \approx [2 \cdot \alpha \cdot FSR \cdot \lambda_0]^{1/2}$ ,

haben wir insgesamt:  $D \geq [2 \cdot \alpha \cdot \lambda_0 / FSR]^{1/2} \cdot F$

Das ist erstaunlicherweise identisch mit dem zuvor gefundenen Resultat!

Ist das Etalon kleiner, dann wird die geometrische Reihe bei der Superposition der Teilstrahlen vorzeitig abgebrochen, und man findet zum Beispiel für die transmittierte Amplitude:

$$E_T = E_0 \cdot \sqrt{[t_1 \cdot t_2]} \cdot e^{i \cdot k \cdot d} \cdot \frac{1 - [r_1 \cdot r_2]^{N/2} \cdot e^{2 \cdot i \cdot k \cdot d \cdot N}}{1 - \sqrt{[r_1 \cdot r_2]} \cdot e^{2 \cdot i \cdot k \cdot d}}$$

Für die Intensität haben wir dann:

$$\begin{aligned} I_T &= I_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \frac{(1 - [r_1 \cdot r_2]^{N/2})^2 + 4 \cdot [r_1 \cdot r_2]^{N/2} \cdot \sin^2(N \cdot k \cdot d)}{(1 - [r_1 \cdot r_2]^{1/2})^2 + 4 \cdot [r_1 \cdot r_2]^{1/2} \cdot \sin^2(k \cdot d)} \\ &= I_T(N=\infty) \cdot [ (1 - [r_1 \cdot r_2]^{N/2})^2 + 4 \cdot [r_1 \cdot r_2]^{N/2} \cdot \sin^2(N \cdot k \cdot d) ] \end{aligned}$$

Man bekommt also wie bei der Beugung am Gitter Nebenmaxima, die umso kleiner sind, je größer  $N$  ist, bis sie schließlich bei sehr großen  $N$  ganz verschwinden. Für  $r_1 = r_2 = 0.98$  und  $N = 100$  ist z.B. der Wert von  $[r_1 \cdot r_2]^{N/2}$  gleich 0.133. Das erste Nebenmaximum bei  $k \cdot d = (q \pm 3/2/N) \cdot \pi$  weicht dann um ca. 3% vom Maximalwert bei  $k \cdot d = q \cdot \pi$  ab ( $q=1,2,3,\dots$ ). Das ist praktisch vernachlässigbar. Die Kurve liegt immer oberhalb der (leicht reduzierten) idealen Kurve, wie die letzte Zerlegung zeigt. Dadurch wird die Funktion breiter. Die Halbwertsbreite der Resonanzen wird mit kleinerem  $N$  größer und damit die Finesse kleiner.